SOCIETE D'ETUDE DE L'ENVIRONNEMENT

sur mandat de la
Section de la Protection de l'Air
de l'Institut Suisse de Météorologie

# CALCUL DES PARAMETRES LAGRANGIENS DE LA DIFFUSION TURBULENTE A PARTIR DE MESURES EULERIENNES DANS LE CAS STATIONNAIRE ET HOMOGENE LE LONG D'UNE LIGNE DE COURANT

1ère partie

Aspect théorique

Dr. P. Ravussin
Ingénieur conseil

Décembre 1983

# CALCUL DES PARAMETRES LAGRANGIENS DE LA DIFFUSION TURBULENTE A PARTIR DE MESURES EULERIENNES DANS LE CAS STATIONNAIRE ET HOMOGENE LE LONG D'UNE LIGNE DE COURANT

1ère partie

Aspect théorique

*

## TABLE DES MATIERES



* * *

avec

(3) $\vec{U} = \bar{\vec{u}} + \vec{u}'$

Lorsque $P_2 \rightarrow P_1$, le tenseur devient symétrique. C'est le <u>tenseur de corrélation</u>.

Selon HINZE (2), lorsque $P_2$ est sous le vent de $P_1$, on trouve, dans le cas isotrope et homogène

(4) $Q_{12}^{ij} = o$ lorsque $i \neq j$

Le tenseur devient diagonal.

$Q_{12}^{11}$ est la fonction de corrélation longitudinale.

$Q_{12}^{22} = Q_{12}^{33}$ sont les fonctions de corrélation latérales.

On peut donc définir, dans le cas isotrope et homogène, la trajectoire passant par $P_1$ comme le lieu des points $P_2$ tels que $Q_{12}^{ij} = o$ lorsque $i \neq j$.

La trajectoire ou ligne de courant est définie en tant que moyenne stochastique ; une bouffée de fumée émise en $P_1$ ne va pas forcément suivre la trajectoire, mais on observera que les réalisations successives suivent en moyenne la trajectoire.

Dans la pratique, on ne peut pas prendre $P_2$ trop éloigné de $P_1$, à cause de la prévisibilité limitée du phénomène (3).

Dans le cas général, et si l'écoulement est suffisamment cohérent (1), on définira la trajectoire passant par $P_1$ comme le lieu des points $P_2$, tels que, pour une distance $P_1$, $P_2$ fixe, le déterminant $|Q_{12}|$ ait le plus grand des maxima : au sens de la Mécanique Aléatoire, on remplace le principe de moindre action de la mécanique lagrangienne par un principe de moindre relâchement du champ de dépendance de probabilité $Q_{12}$.

Dans le cas général, aucun des axes principaux du tenseur $Q_{12}$ n'est tangent à la trajectoire lorsque $P_2 \rightarrow P_1$ : il y a cisaillement. Cette proposition est vérifiée par l'expérience (5).

Au vu de ce qui précède, il est tout naturel de considérer les trajectoires comme la géodésique d'un espace de RIEMANN (7).

Nous supposerons qu'il existe deux autres directions correspondant aux minima des termes non diagonaux qui permettent de définir deux autres familles de courbes, formant avec les trajectoires les coordonnées normales $x^1, x^2, x^3$.

### 1.3. Passage des coordonnées eulériennes aux coordonnées lagrangiennes dans le cas stationnaire et homogène

Selon LUMLEY (4), le champ lagrangien des vitesses peut se décomposer en série de puissance

$$(5)\quad \vec{v}(\vec{a},t) = \vec{u}(\vec{r}(\vec{a},t),t) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \vec{v}(\vec{a},t)\Big|_{t=o} t^n$$

avec

$$(6)\quad \vec{r}(\vec{a},t) = \vec{a} + \int_o^t v(\vec{a},\tau)d\tau$$

pour $\vec{x} = \vec{a}$, les coefficients sont des grandeurs eulériennes

$$(7)\quad \frac{\partial^n}{\partial t^n} \vec{v}(\vec{a},t)\Big|_{t=o} = \left\{\frac{\partial}{\partial t} + u^j(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial x^j}\right\}^n \vec{u}(x,t)\Big|_{t=o}$$

en particulier, pour $n = 1$, on a

$$(8)\quad \frac{\partial v^i}{\partial t} \equiv \frac{du^i}{dt} = \frac{\partial u^i}{\partial t} + u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\Big|_{t=o}$$

Lorsque le phénomène est stationnaire et homogène le long d'une trajectoire, on peut écrire, quels que soient x et t, en moyenne

$$(9)\quad \overline{\frac{\partial v^i}{\partial t}} \equiv \overline{\frac{du^i}{dt}} = \overline{\frac{\partial u^i}{\partial t}} + \overline{u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}}$$

et le moment lagrangien d'ordre n s'écrit :

$$(10)\quad \overline{v^{i^n}} = \overline{\left\{u^i + \int_o^t u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} d\tau\right\}^n} \qquad t \to \infty$$

(à ne pas confondre avec la nième dérivée de la formule (7))

comme $\overline{\vec{v}} = \overline{\vec{u}}$ pour $\vec{x} = \vec{a}$

$$(11)\quad \overline{\int_o^t u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} d\tau} = o \quad \text{(sommation sur j)}$$

Les moments d'ordre 2 s'écrivent :

$$(12)\quad \overline{v^i v^k} = \overline{\left\{u^i + \int_o^t u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\, d\tau\right\}\left\{u^k + \int_o^t u^j \frac{\partial u^k}{\partial x^j}\, d\tau\right\}} =$$

$$= \overline{u^i u^k} + \overline{u^i \int_o^t u^j \frac{\partial u^k}{\partial x^j}\, d\tau} + \overline{u^k \int_o^t u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\, d\tau} +$$

$$+ \overline{\int_o^t u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\, d\tau \int_o^t u^j \frac{\partial u^k}{\partial x^j}\, d\tau}$$

par rapport à un référentiel mobile centré sur $\overline{\vec{v}}$, on a

$$(13)\quad \overline{v'^i v'^k} = \overline{v^i v^k}$$

Comme le phénomène est stationnaire et homogène, il est possible de remplacer les moyennes stochastiques par les moyennes temporelles en un point.

## 1.4. Diffusion turbulente

Considérons en coordonnées normales y, l'équation de diffusion de FICK (6)

$$(14)\quad \frac{\partial \chi}{\partial t} + \vec{v}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \chi = D\,\Delta\,\chi$$

$\chi$ : densité numérique des particules

D : coefficient de diffusion moléculaire

En négligeant la diffusion moléculaire, (14) devient, en moyenne :

$$(15)\quad \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} + \overline{v^i}\,\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial y^i} + \overline{v'^i\,\frac{\partial \chi'}{\partial y^i}} = 0$$

Si l'on se place en coordonnées normales mobiles, centrées sur le corpuscule aléatoire, le terme d'advection disparaît et il vient

$$(16)\quad \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} + \overline{v'^i\,\frac{\partial \chi'}{\partial y^i}} = 0$$

BOUSSINESQ (1877) écrit, dans le cas isotrope

$$(17)\quad \overline{v'^i \chi'} = \frac{\partial}{\partial y^i}\, D_T \qquad D_T \text{ coefficient de diffusion turbulente}$$

d'où

$$(18) \quad \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} + \vec{\bar{v}}\ \vec{\mathrm{grad}}\ \bar{\chi} = (D + D_T)\,\Delta \bar{\chi}$$

Dans le cas anisotrope $D_T$ est un tenseur d'ordre 2 dont les composantes s'écrivent, dans la théorie de la longueur de mélange, en définissant l'espace de RIEMANN de telle sorte que les axes principaux du tenseur soient parallèles aux lignes des coordonnées normales :

$$(19) \quad D^{ii} = \sqrt{\overline{v'^{i2}}} \cdot \ell^{i}$$

$\ell^{i}$ longueur de mélange dans la direction i.

La "mesure" de la diffusion turbulente est l'écart type du déplacement lagrangien $\sqrt{\overline{y'^{i2}}}$

$$(20) \quad \overline{y'^{i2}} = D^{ii} \cdot t$$

que l'on peut relier à l'autocorrélation lagrangienne $\rho^{i}(t)$ par

$$(21) \quad \overline{y'^{i2}} = \overline{v'^{i2}} \int_{o}^{\infty} \rho^{i}(\tau)\,d\tau \cdot t$$

Selon (3), la turbulence en atmosphère libre est un processus Markovien et

$$(22) \quad \rho^{i}(t) = e^{-t/\tau^{i}}$$

$\tau^{i}$ constante de temps lagrangienne

alors

$$(23) \quad \overline{y'^{i2}} = \overline{v'^{i2}} \cdot \tau^{i} \cdot t = D^{ii} \cdot t$$

Dans le cas stationnaire et homogène, les termes de (23) peuvent être calculés à partir de mesures eulériennes en 1 point .

Choisissons l'espace de RIEMANN de telle sorte que la solution de (18) dans le système de coordonnées normales s'écrive

$$(24) \quad \chi(y^{i},t) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{D^{11}D^{22}D^{33}t^{3}}} \exp\left\{ - \frac{{y^{1}}^{2}}{2D^{11}t} - \frac{{y^{2}}^{2}}{2D^{22}t} - \frac{{y^{3}}^{2}}{2D^{33}t} \right\}$$

Q nombre de particules émises au temps t = o, au point de coordonnées (o,o,o).

L'espace de RIEMANN coïncide avec l'espace Euclidien lorsque $u^i$ = cte et $D^{ii}$ = cte $\quad i = 1,2,3$

D'autres solutions analytiques peuvent être trouvées dans des cas simples. Ces solutions ne sont plus gaussiennes.

## 1.5. Conclusions

Les paramètres de la diffusion turbulente peuvent être calculés à partir de mesures eulériennes des vitesses et de leur gradient dans le cas stationnaire et homogène le long d'une ligne de courant. Des solutions analytiques de calcul des concentrations de polluant peuvent être trouvées dans des cas simples.

Dans le cas général, des solutions numériques de l'équation différentielle de la diffusion peuvent être calculées par ordinateur.

* * *

**BIBLIOGRAPHIE**

(1) F. BAATARD et S. MAGNIN. La Mécanique Aléatoire de G. DEDEBANT et Ph. WHERLE, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Publication No 124, 1972.

(2) HINZE. Turbulence (2ème édition), Mc Graw Hill, 1975.

(3) P. RAVUSSIN. Théorie de la Prévisibilité. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Publication No 134, 1973.

(4) J.L. LUMLEY. Mécanique de la Turbulence (Colloque International) CNRS Paris 1962, pp.17-26.

(5) P. RAVUSSIN, A.NAKKASIAN. Travail de diplôme du cours 3ème cycle de spécialisation en statistique, EPFL 1978.

(6) S. CARRSIN. Mécanique de la Turbulence (Colloque International) CNRS Paris 1962, pp.27-52.

(7) A. LICHNEROWICZ. Eléments de calcul tensoriel. A. Colin, Paris 1960.

(8) M. DENIS-PAPIN, A. KAUFMANN. Cours de calcul tensoriel appliqué. Albin Michel, Paris 1966.

(9) L. BRILLOUIN. Les tenseurs en mécanique et en élasticité. Masson, Paris 1960.

(10) SHI GUONING. Equations différentielles floues et leur emploi possible en météorologie. La Météorologie. VIe série, No 28, mars 1982.

* * * *