

# La méthode de Monte-Carlo au sens de la Mécanique Aléatoire

## Résumé

La méthode de Monte-Carlo permet de simuler un processus physique au moyen de fonctions de densité de probabilité. La Mécanique aléatoire permet « d'aléatoriser » les équations représentant le processus physique et d'en tirer les fonctions de densité de probabilité nécessaires.

## Abstract

An essential component of a Monte Carlo simulation is the modeling of the physical process by one or more **probability density functions** (pdf's). By describing the process as a *pdf*, which may have its origins in experimental data or in a theoretical model describing the physics of the process, one can sample an "outcome" from the pdf, thus simulating the actual physical process. Aleatory Mechanic lets transform the physical model of the process in to "aleatorised" equations that contains the pdf needed for the Monte-Carlo simulation.

## 1 Introduction

La méthode numérique dite de Monte-Carlo peut être décrite globalement comme une méthode de simulation statistique qui utilise une séquence de nombres aléatoires pour la réaliser. La méthode de Monte-carlo a été utilisée depuis des siècles, mais ce n'est que durant les dernières décennies qu'elle a gagné le statut de méthode numérique à part entière, capable de résoudre les applications les plus complexes. Le nom « Monte-Carlo » a été mis en exergue durant le projet Manhattan durant la 2<sup>ème</sup> guerre mondiale à cause des similitudes entre les simulations statistiques mises au point à cette occasion et les jeux de hasard dont ville de Monte-Carlo était la capitale à cette époque.

La méthode de Monte-Carlo est utilisée aujourd'hui dans des champs d'applications aussi variés et complexes que les transferts radiatifs dans l'atmosphère, les processus sub-nucléaires, l'interaction de la lumière avec la matière vivante ou les phénomènes de turbulence.

La méthode de Monte-Carlo doit être opposée aux méthodes conventionnelles de simulation par éléments finis qui utilisent le système d'équations différentielles décrivant le système physique ou mathématique sous-jacent. Dans biens des applications, le processus physique est simulé directement par la méthode de Monte-Carlo et il n'y a pas besoin d'écrire le système d'équations différentielles qui décrivent le comportement du système. La seule hypothèse nécessaire est que le système physique ou mathématique peut être décrit par des fonctions de densité de probabilité  $p(x)$  ou  $x$  est un ensemble de variables aléatoires.

Les  $p(x)$  connus, la méthode de Monte Carlo procède par échantillonnage en appliquant une série de réalisations  $x^*$  des variables aléatoires  $x$ . De multiples échantillons sont ainsi calculés et le résultat est obtenu en calculant la moyenne de ces réalisations. Dans bien des cas, la variance des  $x^*$  donne une indication de l'erreur statistique et permet de calculer le nombre de réalisations nécessaires pour obtenir une précision donnée.

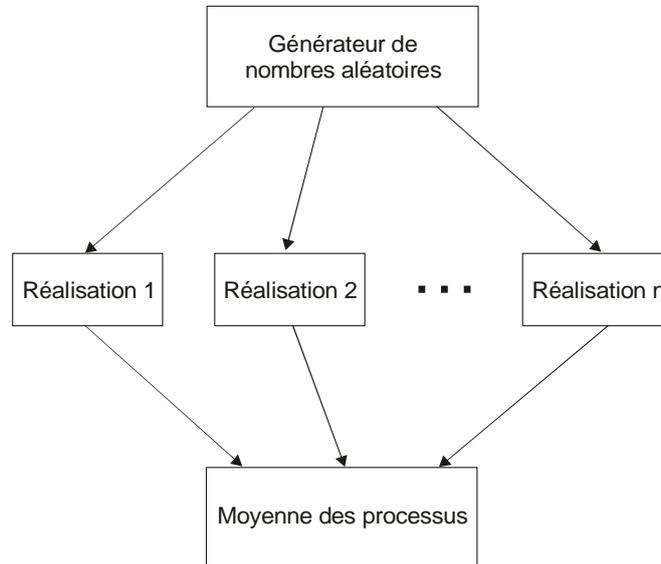


Fig 1 calcul en parallèle des processus

La méthode de Monte-Carlo présente deux énormes avantages sur les méthodes par éléments finis.

- En procédant par échantillonnage, le nombre de calculs élémentaires nécessaire pour obtenir un résultat donné est considérablement plus petit.
- Il est extrêmement simple d'utiliser des processeurs en parallèle, par exemple un réseau d'ordinateurs, car chaque « réalisation » se fait par un calcul identique et peut se faire simultanément.

Le but de ce texte est de montrer comment il est possible de passer de façon générale, grâce à la Mécanique Aléatoire, d'un système d'équations différentielles décrivant un système physique à un jeu de variables aléatoires définies par leur densité de probabilité.

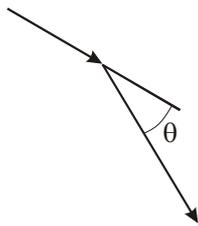
On trouvera aussi un exemple d'application de la méthode de Monte-Carlo à la simulation de l'interaction lumière – tissus biologiques.

## 2 Rappel de Probabilité et de Statistique

Un élément essentiel de la simulation par la méthode de Monte-Carlo est la modélisation du processus physique par une ou plusieurs fonctions de densité de probabilité  $p(x)$ . L'origine de  $p(x)$  peut être des données expérimentales, un modèle théorique aléatoire décrivant le processus, ou, comme nous allons le montrer, le système d'équations différentielles lui-même.

Dans ce premier exemple, l'interaction de la lumière avec un tissu biologique peut être simplement décrit par le parcours moyen d'une « particule » de lumière dans le tissu (lié à sa transparence) et sa dispersion liée à une loi de diffusion. Les fonctions de densité de probabilité sont ici la loi exponentielle décroissante de l'absorption. (fig. 2) et les angles de diffusion. Chaque valeur d'angle a une certaine probabilité d'être réalisé.

Les sauts successifs d'une particule de lumière tiennent compte de l'anisotropie de la diffusion. La probabilité d'un saut dans une direction dépend de l'angle de déflexion  $\theta$  avec la direction incidente (par exemple modèle Henyey-Greenstein) et du coefficient de diffusion.



$$p(\theta) = \frac{1 - g^2}{2(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}}$$

L'angle azimutal  $\psi$  est distribué uniformément entre 0 et  $2\pi$

La longueur des sauts est distribuée selon une loi exponentielle pour tenir compte de l'absorption et de la diffusion de la lumière. La matière elle-même est isotrope.

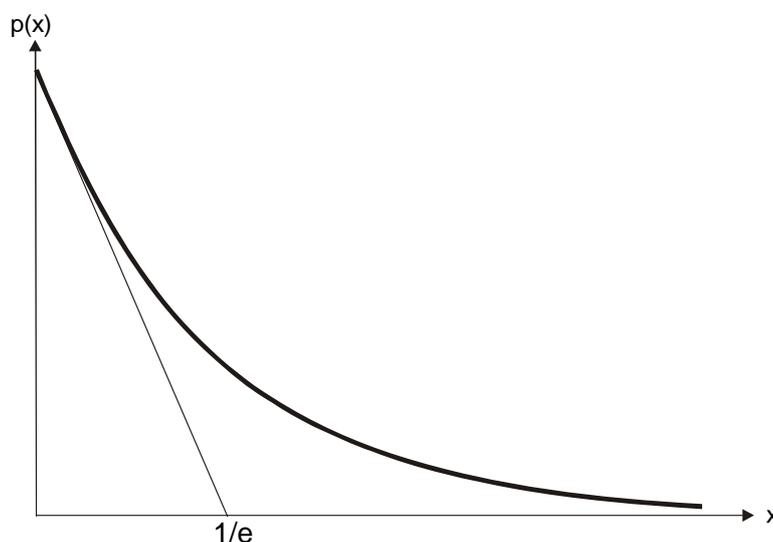


Fig. 2 Loi exponentielle de la densité de probabilité

Par contraste, la méthode classique utilisera les équations classiques de l'absorption et de la diffusion, découpera le volume d'épreuve en un grand nombre de volumes élémentaires et calculera les valeurs d'intensité pour chaque face de chaque volume élémentaire et l'énergie absorbée pour chaque volume élémentaire.

Rappel des notions statistiques au sens de la Mécanique Aléatoire. Soit  $T(u_1, u_2, u_3, t)$  la température en un point de l'espace de coordonnées  $u_1, u_2, u_3$  et au temps  $t$ , que nous noterons  $T(\mathbf{u}, t)$ .

$T(\mathbf{u}, t)$  est une fonction certaine et représente le phénomène physique « température » dans l'espace réel.

Au sens de la Mécanique aléatoire  $T(\mathbf{u}, t)$  est une fonction aléatoire des variables certaines  $\mathbf{u}, t$  et est représentée pour chaque  $\mathbf{u}$  et  $t$  par l'ensemble des « réalisations » ou « valeurs »  $T^*(\mathbf{u}, t)$ . Pour chaque point de l'espace et pour chaque temps, on a un « nuage » de valeurs  $T^1, T^2, \dots, T^\infty$

De façon générale, on appelle **variable aléatoire**  $x$  un ensemble d'éléments  $x^i$  appelés « valeurs » ou « réalisations » de la variable aléatoire  $x$ . Les  $x^i$  sont ici des nombres réels.

La **fonction de répartition**  $F(x)$ , que l'on appelle aussi fonction de répartition cumulative, représente la probabilité pour qu'une réalisation quelconque  $x^j$  de  $x$  soit inférieure à une valeur donnée  $x^i$

$$1) \quad F(x^i) = \text{Prob}(x^j < x^i)$$

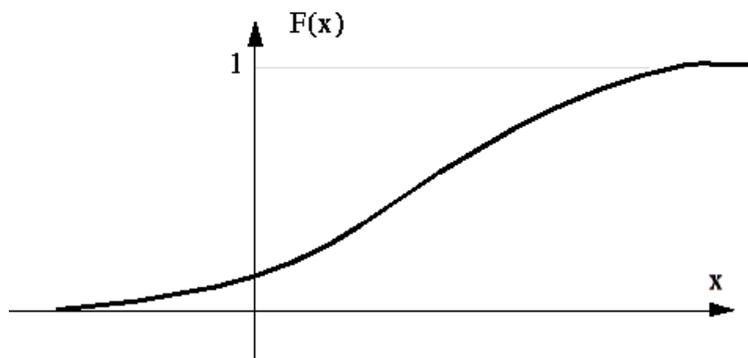


Fig. 3. Exemple de fonction de répartition, correspondant à une densité de probabilité gaussienne

La **densité de probabilité**  $p(x)$  de la variable aléatoire  $x$  est définie par la fréquence relative d'apparition de la valeur  $x^i$

$$2) \quad p(x) = \frac{d F(x)}{dx}$$

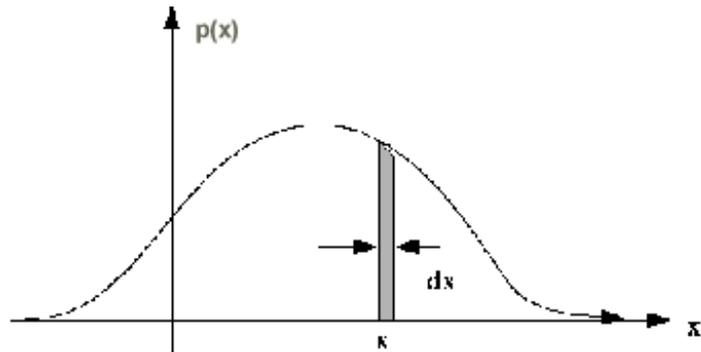


Fig. 4. Exemple de densité de probabilité : distribution gaussienne

Une variable aléatoire  $x$  est donc définie sur l'ensemble des nombres réels  $x^i$  soit par sa fonction de répartition  $F(x)$ , soit par sa densité de probabilité  $p(x)$ .

Considérons maintenant deux variables aléatoires  $x_1$  et  $x_2$ .

On définit la **fonction de répartition composée**  $F(x_1, x_2)$  des deux variables aléatoires  $x_1$  et  $x_2$  comme la probabilité que l'on ait à la fois une réalisation quelconque  $x_1^j$  de  $x_1$  inférieure à  $x_1^i$  et une réalisation quelconque  $x_2^j$  de  $x_2$  inférieure à  $x_2^i$ .

$$3) \quad F(x_1^j, x_2^j) = \text{probabilité } (x_1^j < x_1^i \text{ et } x_2^j < x_2^i)$$

$F(x_1, x_2)$  possède les propriétés suivantes, déduites des axiomes de base :

$$4) \quad F(x_1, x_2) \geq 0$$

$$5) \quad F(+\infty, +\infty) = 1$$

$$6) \quad F(x_1, -\infty) = 0$$

$$7) \quad F(-\infty, x_2) = 0$$

Si  $x_1^i \leq x_1^j$  et  $x_2^k < x_2^l$

Alors

$$8) \quad F(x_1^i, x_2^k) + F(x_1^j, x_2^l) - F(x_1^i, x_2^l) - F(x_1^j, x_2^k) \geq 0$$

La **densité de probabilité composée**  $p(x_1, x_2)$  est définie par :

$$9) \quad p(x_1, x_2) = \frac{\delta^2 F(x_1, x_2)}{\delta x_1 \delta x_2}$$

On définit aussi les **densités de probabilité conditionnelles** par :

$$10) \quad p(x_1 / x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{p(x_2)}$$

Une variable aléatoire  $x$  peut être fonction de paramètres  $(t_1, \dots, t_n)$

C'est alors une **fonction aléatoire**  $x(t_1, \dots, t_n)$  que l'on notera  $x(t)$

Considérons l'espace formé par  $x(t)$  perpendiculaire à l'espace réel  $t$

Il existe une infinité de réalisations possibles  $x^*(t)$ , plus ou moins probables, représentées dans l'espace réel par des courbes.

Nous définissons encore :

$$11) \quad \bar{x}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

**Moyenne aléatoire de  $x_1$**

$$12) \quad \bar{x}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

**Moyenne aléatoire de  $x_2$**

$$13) \quad \overline{x_1^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

**Moment du 2<sup>ème</sup> ordre de  $x_1$**

$$14) \quad \overline{x_2^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

**Moment du 2<sup>ème</sup> ordre de  $x_2$**

$$15) \quad \overline{x_1 x_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

**Moments croisés de  $x_1$  et  $x_2$**

Définissons encore :

$$15) \quad \sigma_i = \sqrt{(x_i - \bar{x}_i)^2} = \sqrt{\overline{x_i^2} - \bar{x}_i^2}$$

**Ecart type ou déviation standard**

$$15bis) \quad v = \sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

est la **covariance**

Le moment composé normalisé de  $x_1$  et  $x_2$  vaut :

$$16) \quad \rho_{x_1 x_2} = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \bar{x}_1) (x_2 - \bar{x}_2) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

C'est le **coefficient de corrélation** entre les deux variables  $x_1$  et  $x_2$

Il s'écrit aussi

$$17) \quad \rho_{12} = \frac{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)}{\sqrt{(x_1^2 - \bar{x}_1^2)(x_2^2 - \bar{x}_2^2)}} = \frac{\overline{x_1 x_2} - \bar{x}_1 \bar{x}_2}{\sqrt{(\overline{x_1^2} - \bar{x}_1^2)(\overline{x_2^2} - \bar{x}_2^2)}}$$

La méthode de Monte-Carlo conduit à un nombre discret de réalisations. Dans ce cas les moments de divers ordre seront calculés par sommation.

Il suffit de connaître

$$18) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x^j$$

et

$$19) \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x^j y^j$$

On retrouve le cas continu en passant à la limite par  $n \rightarrow \infty$

### 3 Espace aléatoire

Nous définissons un espace aléatoire dans lequel le champ de dépendance de probabilité  $p(x_1, x_2)$  n'apparaît plus que sous la forme intrinsèque des moments du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>ème</sup> ordre.

#### 3.1 vecteur aléatoire

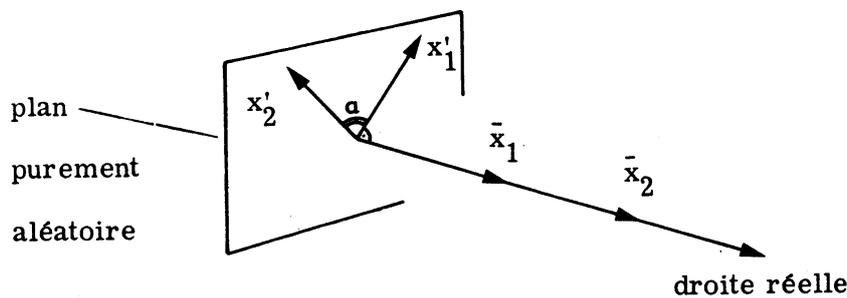
Une variable aléatoire  $x$  peut être représentée dans l'espace aléatoire par un vecteur  $\mathbf{x}$ , défini par sa norme  $\|\mathbf{x}\|$ , et la position qu'il occupe dans l'espace.

$$\text{On a } \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = \overline{\mathbf{x}^2}$$

Le vecteur aléatoire  $\vec{x}$  peut être décomposé en un vecteur certain  $\vec{\bar{x}}$ , avec  $\|\bar{x}\| = \bar{x}$  porté par la droite certaine, et un vecteur purement aléatoire  $\vec{x}'$ , orthogonal, représentant, représentant l'ensemble des nombres réels  $x - \bar{x}$ .

On peut vérifier que l'on a bien  $\|\vec{x}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\vec{x}'\|^2$

La dépendance de probabilité entre 2 variables aléatoires  $x_1$  et  $x_2$  sera représentée dans l'espace aléatoire par l'angle  $\alpha$  que forment les composantes purement aléatoires des vecteurs  $x'_1$  et  $x'_2$



avec  $\cos \alpha = \rho_{12}$  coefficient de corrélation

### 3.2 Espace aléatoire

$n$  vecteurs aléatoires forment donc dans l'espace de Hilbert un espace à  $n + 1$  dimensions au plus, formé de la droite réelle perpendiculaire à l'espace purement aléatoire, à  $n$  dimensions au plus.

Lorsque les  $n$  variables aléatoires sont toutes indépendantes mutuellement, alors  $\cos \alpha_{ij} \sim 0$  quelles que soient  $i$  et  $j$  et les vecteurs forment une base orthogonale dans l'espace de Hilbert.

Lorsque les  $n$  variables aléatoires sont toutes dépendantes, alors  $\rho_{ij} = 1$  et l'espace de Hilbert purement aléatoire dégénère en une droite purement aléatoire.

### 3.3 Algèbre aléatoire

On peut définir dans l'espace vectoriel aléatoire une algèbre linéaire non commutative appelée **algèbre aléatoire**.

En effet, on a :

- Un corps de scalaires (nombres réels) munis de lois
  - + d'addition
  - \* de multiplication
  
- Un ensemble de vecteurs muni de lois de composition interne :
  - $\perp$  addition vectorielle
  - $\wedge$  multiplication vectorielle.
  
- Une loi de composition externe liant les scalaires aux vecteurs vérifiant :
  1. Propriétés propres à la première loi sur les vecteurs (addition)
    - Associativité  $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y}) \perp \mathbf{z} = \mathbf{x} \perp (\mathbf{y} \perp \mathbf{z})$
    - existence d'un élément neutre (vecteur nul)  $\mathbf{x} \perp \mathbf{0} = \mathbf{0} \perp \mathbf{x} = \mathbf{0}$
    - existence d'un élément inverse  $\mathbf{x} \perp (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) \perp \mathbf{x} = \mathbf{0}$
    - commutativité  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} = \mathbf{y} \perp \mathbf{x}$
  
  2. Propriété propre à la seconde loi sur les vecteurs (produit tensoriel)
    - $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} = \mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z})$
  
  3. Propriétés de la seconde loi sur les vecteurs par rapport à la première loi sur les vecteurs
    - distributivité à droite  $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y}) * \mathbf{z} = (\mathbf{x} * \mathbf{z}) \perp (\mathbf{y} * \mathbf{z})$
    - distributivité à gauche  $\mathbf{z} * (\mathbf{x} \perp \mathbf{y}) = (\mathbf{z} * \mathbf{x}) \perp (\mathbf{z} * \mathbf{y})$
  
  4. Propriété de la loi externe liant les scalaires aux vecteurs
    1. Distributivité par rapport aux scalaires  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} \perp \mathbf{B} \mathbf{x}$
    2. Distributivité par rapport aux vecteurs  $\mathbf{A} (\mathbf{x} \perp \mathbf{y}) = \mathbf{A} \mathbf{x} \perp \mathbf{A} \mathbf{y}$
    3. Associativité des scalaires (1<sup>ère</sup> loi sur les vecteurs)  $\mathbf{A} (\mathbf{B} \mathbf{x}) = (\mathbf{AB}) \mathbf{x}$
    4. Associativité des scalaires (2<sup>ème</sup> loi sur les vecteurs)  $\mathbf{A}(\mathbf{x} * \mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{x}) * \mathbf{y} = \mathbf{x} * (\mathbf{A} \mathbf{y})$
    5. Existence d'un élément neutre scalaire  $\mathbf{1} \mathbf{x} = \mathbf{x}$
  
  5. Une axiomatique des fonctions aléatoires définissant leur dérivabilité et l'intégrabilité des fonctions dans le continuum non aléatoire (par exemple l'espace – temps) [1]

L'algèbre aléatoire est donc unitaire, non commutative.

Les règles de base du calcul sont :

$$20) \quad \overline{\mathbf{x} + \mathbf{y}} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}$$

$$21) \quad \overline{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{y}}$$

$$22) \quad \overline{\mathbf{x}\mathbf{Y}^*} = \bar{\mathbf{x}} \mathbf{Y}^* \quad (\mathbf{Y}^* \text{ est un scalaire})$$

Règles de dérivation par une fonction certaine

$$23) \quad \frac{\overline{\partial \mathbf{x}}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \bar{\mathbf{x}}$$

$$24) \quad \frac{\overline{\partial \mathbf{x}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{x}}$$

Les 2 dernières équations représentent par exemple la dérivé dans le continuum non aléatoire de l'espace-temps  $\mathbf{u}t$

Règle d'intégration sur une fonction certaine

$$25) \quad \overline{\int \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) d\mathbf{u}} = \int \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

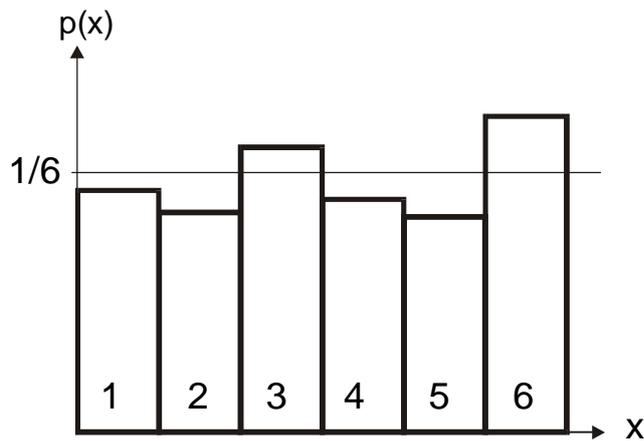
## 4 Transformation d'un système d'équations déterministes en un système de fonctions aléatoires

### 4.1 Le théorème ergodique

Le théorème ergodique démontre l'équivalence des dépendances de probabilité prises le long du processus aléatoire (au cours de réalisations successives) ou à travers le processus (purements stochastique)

### 4.2 Exemple

Prenons un dé à jouer imparfait . La probabilité d'apparition d'un chiffre lors d'un jeté est d'environ 1/6, à moins que le dé soit « pipé » auquel cas un des chiffre a une probabilité d'apparition nettement supérieure à 1/6.



densité de probabilité

### *Probabilité le long du processus*

Ces probabilités sont obtenues en lançant successivement le même dé et en notant la chiffre obtenu.

La densité probabilité d'obtenir un chiffre est calculée en divisant le nombre de jetés obtenus pour chaque chiffre par le nombre total de jetés.

### *Probabilité à travers le processus*

Supposons maintenant que l'on possède un très grand nombre de dés tous rigoureusement identiques à celui utilisé pour l'expérience précédente.

Si l'on lance tous ces dés en une seule fois, on va obtenir les mêmes densités de probabilité que précédemment.

### 4.3 Echelle temporelle

Dans l'exemple précédent, les résultats seront faussés si le dé à jouer est modifié au cours du temps (usure, etc.). Il faut donc définir une intervalle de temps  $\Delta t$  pendant lequel le dé peut être considéré comme identique à lui-même. On dit que le processus est stationnaire sur  $\Delta t$ .

Et on peut écrire :

$$26) \quad \bar{f} = \langle f \rangle_t = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(\mathbf{u}, t) dt$$

Traisons le cas du fluide visqueux incompressible.

Les équations de Navier Stokes « aléatorisées » s'écrivent :

$$27) \quad \overline{\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} + \mathbf{v}(\nabla \mathbf{v})} = - \frac{1}{\rho} \overline{\mathbf{grad} p} + \Delta(\mathbf{v}\mathbf{v})$$

$\mathbf{v}$  vecteur vitesse  
 $\rho$  densité = cte  
 $p$  pression  
 $\nu$  viscosité dynamique

en notation d'Einstein 27) devient

$$28) \quad \overline{\frac{\delta v_i}{\delta t} + v_j \frac{\delta v_i}{\delta x_j}} = - \frac{1}{\rho} \frac{\delta \bar{p}}{\delta x_i} + \nu \frac{\delta^2 v_i}{\delta x_i \delta x_j}$$

Les moments de 2<sup>ème</sup> ordre n'apparaissent que dans le terme complémentaire d'Euler

$$\overline{v_j \frac{\delta v_i}{\delta x_j}}$$

En posant :

$$29) \quad \overline{v_j \frac{\delta v_i}{\delta x_j}} = \frac{\delta}{\delta x_j} \overline{v_j v_i} = \frac{\delta}{\delta x_j} \bar{v}_j \bar{v}_i + \frac{\delta}{\delta x_j} \overline{v'_j v'_i}$$

On retrouve équation de Reynold

$$30) \quad \overline{\frac{\delta \bar{\mathbf{v}}}{\delta t} + \bar{\mathbf{v}}(\nabla \bar{\mathbf{v}})} = - \frac{1}{\rho} \overline{\mathbf{grad} p} + \mu \Delta(\bar{\mathbf{v}}) - \overline{\mathbf{v}'(\nabla \mathbf{v}')}$$

dont le dernier terme contient le tenseur de Reynold  $\overline{v'_j v'_i}$

Cet exemple montre comment il est possible de retrouver une équation de la mécanique de la turbulence grâce à l'axiomatique aléatoire.

## 5 Simulation de l'interaction lumière – matière vivante

Ce modèle utilise la méthode dite de « Monte-Carlo » pour calculer l'absorption et la diffusion de la lumière dans la matière vivante. Une particule de lumière, souvent appelée improprement « photon », saute aléatoirement d'une position à une autre à l'intérieur de la matière, en perdant son énergie, à cause des phénomènes d'absorption et de diffusion. Le programme « lance » une série de particules de lumière à partir du point origine et recueille l'énergie perdue dans une série de cellules situées dans un plan x-0-z.

Le résultat est affiché graphiquement. L'énergie contenue dans chaque cellule est visualisée sous forme d'un carré plus ou moins lumineux.

Cette méthode est beaucoup plus rapide que les méthodes par éléments finis car elle n'effectue qu'un échantillonnage du modèle physique.

Lorsque l'impulsion lumineuse réelle est de courte durée, le graphique représente l'élévation instantanée de la température.

La longueur des sauts et leur direction sont déterminés aléatoirement. Le programme utilise la variable aléatoire générée par le logiciel Microsoft Visual Studio. Cette variable est initialisée différemment chaque fois qu'on lance le calcul. Chaque essai est donc différent.

Le programme permet de choisir la façon dont les particules de lumière sont lancées.

### 5.1 Paramètres de la matière

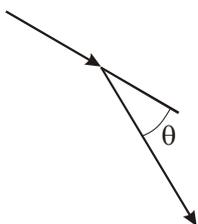
La matière est caractérisée par les paramètres suivants :

$\mu_a$  coefficient d'absorption [ $\text{cm}^{-1}$ ]. La lumière est d'autant plus absorbée que  $\mu_a$  est grand

$\mu_s$  coefficient de diffusion [ $\text{cm}^{-1}$ ]. La lumière est d'autant plus fortement diffusée que  $\mu_s$  est grand

$g$  facteur d'anisotropie.  $g = 0 \rightarrow$  diffusion isotrope

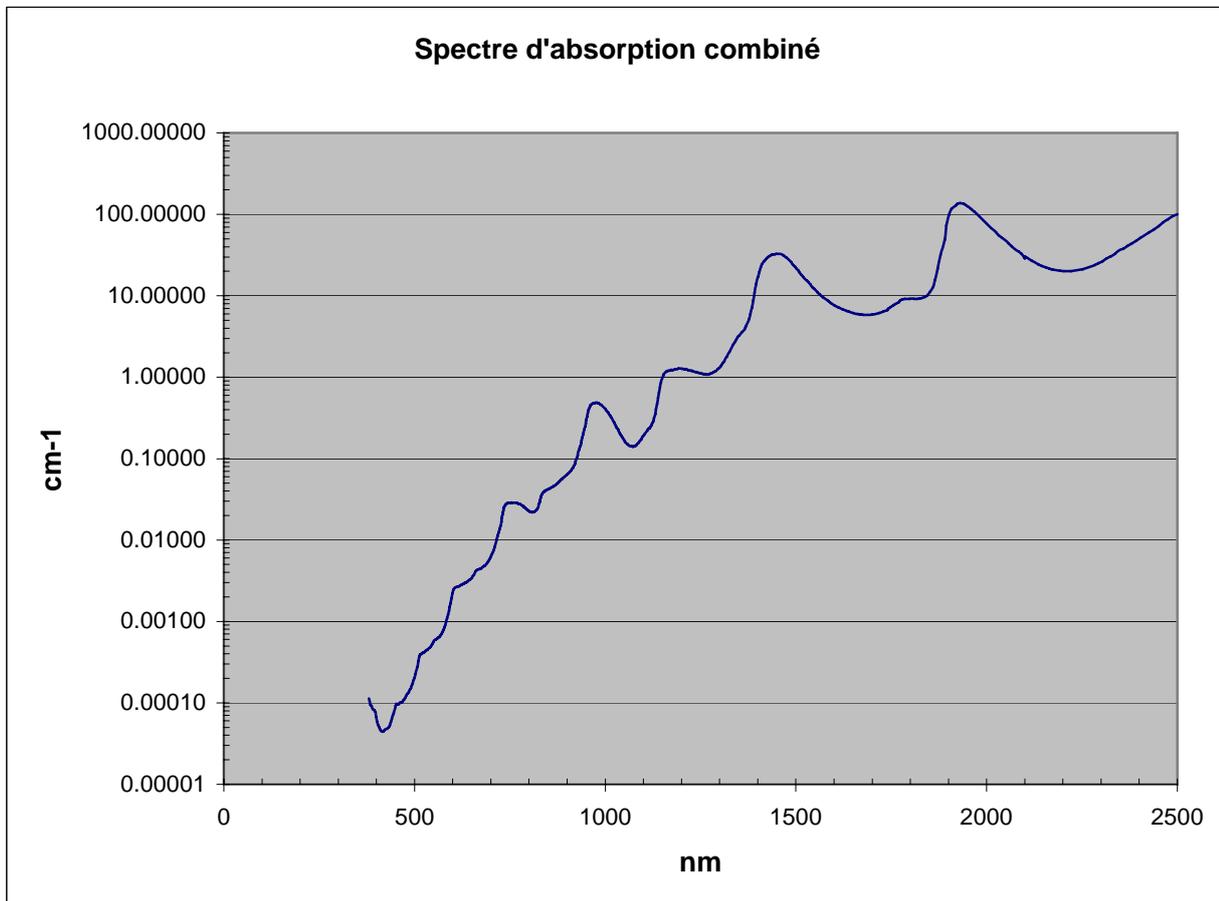
Les sauts successifs d'une particule de lumière tiennent compte de l'anisotropie de la diffusion. La probabilité d'un saut dans une direction dépend de l'angle de déflexion  $\theta$  avec la direction incidente (modèle Henyey-Greenstein) et du coefficient de diffusion.



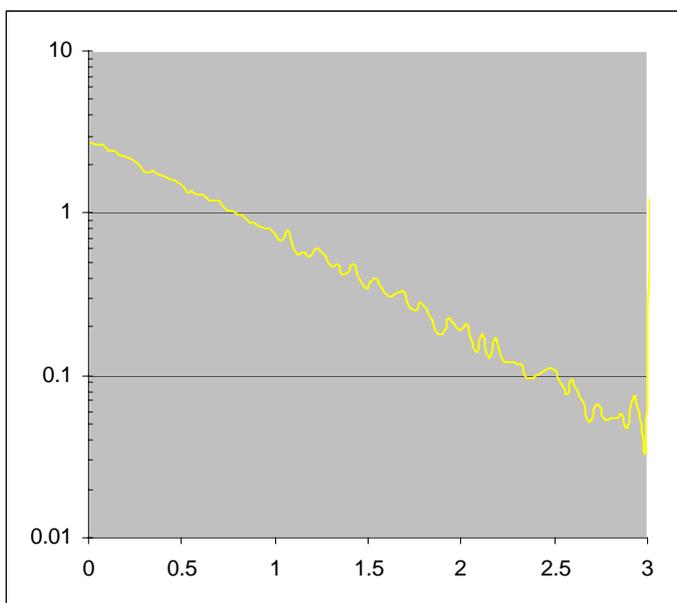
$$p(\theta) = \frac{1 - g^2}{2(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}}$$

L'angle azimutal  $\psi$  de diffusion est distribué uniformément entre 0 et  $2\pi$

La longueur des sauts est distribuée selon une loi exponentielle pour tenir compte de l'absorption et de la diffusion de la lumière. La matière elle-même est isotrope.  
Le spectre d'absorption de l'eau donne une bonne approximation de l'absorption de la lumière par la matière vivante.



## 5.2 Vérification



Source isotropique ponctuelle

100'000 particule de lumière.

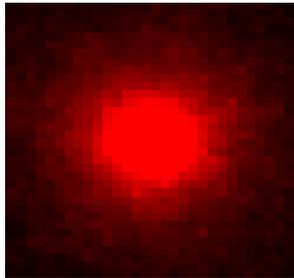
Le graphique représente l'intensité lumineuse reçue par une surface élémentaire fonction de la distance à la source.

Le bruit statistique augmente lorsqu'on s'éloigne de la source

En posant  $\mu_s = 0$  et  $g = 0$ , on retrouve la loi quadrique de l'éclairement

### 5.3 Source ponctuelle isotrope

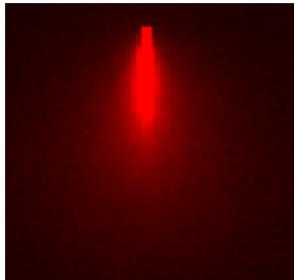
Chaque particule de lumière est issue d'une source ponctuelle située au milieu de la matière ( $x=0, y=0, z=0$ ). La source est isotropique. Le programme utilise la distribution aléatoire des angles directeurs en coordonnées cartésiennes.



10'000 photons  
100 cellules  
 $\mu_a = 1$   
 $\mu_s = 100$   
 $g = 0,9$

### 5.4 Source parallèle ponctuelle

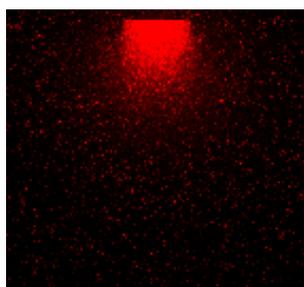
Les particules de lumière sont issues du point (0,0,0) et sont lancée dans la direction z



100'000 photons  
1000 cellules  
 $\mu_a = 1$   
 $\mu_s = 20$   
 $g = 0,9$

### 5.5 Source parallèle étendue

Les particules de lumière sont issues d'une surface circulaire centrée au point (0,0,0) et sont lancées dans la direction z.



100'000  
photons  
1000 cellules  
 $\mu_a = 1$   
 $\mu_s = 20$   
 $g = 0,9$

## 5.6 Paramètres de la simulation

La vitesse de calcul, le nombre maximum de particules de lumière et le nombre maximum de cellules dépendent de la capacité de l'ordinateur.

Les paramètres par défaut se trouvent dans le fichier mc32.ini et peuvent être modifiés au moyen d'un éditeur de texte.

## 5.7 Graphique

Le graphique comporte  $(2n)^2$  cellules. L'affichage du graphique devient lent lorsque le nombre de cellules  $n$  est trop grand.

## 5.8 Température

Le programme calcul l'élévation instantanée de la température correspondant à une impulsion lumineuse de courte durée d'énergie connue. La chaleur spécifique par défaut est celle de l'eau.

Le curseur vertical permet de déplacer le profil de température.

## 6 Bibliographie

P. RAVUSSIN (1983) Calcul des paramètres lagrangiens de la diffusion turbulente ... Institut Suisse de Météorologie

P. RAVUSSIN (1979), Cours de Mécanique Aléatoire de la turbulence et de la diffusion, Bases scientifiques de la protection de l'air, cours officiel en langue française de l'Organisation Mondiale de la Santé, de l'Organisation Météorologique Mondiale et du Programme des Nations Unies pour l'Environnement.

P. RAVUSSIN (1978), Recueil des exposés présentés à la journée d'étude sur les perspectives d'utilisation des techniques de mesures à distance de la pollution atmosphérique, pp. 153,154 Ministère de l'Environnement, Neuilly

P. RAVUSSIN (1973) Théorie de la prévisibilité EPFL No 134

BOUSSINESQ (1877) Théorie des écoulements tourbillonnaires CR Acad. Sc. T. 23

F. BAATARD et S. MAGNIN (1972) La mécanique aléatoire de G. Deдебант et Ph. Wherlé EPFL No 124

P. RAVUSSIN (1971) Mesure de l'Inconnue d'une fonction aléatoire (théorie- de la prévisibilité) Thèse EPFL No 126

S. PANCHEV (1971) Random Functions and Turbulence. Pergamon Press

F. BAATARD (1963) Structure générale d'une mécanique de la diffusion Thèse No 3927 EPFZ

G. DEDEBANT et Ph. WHERLE (1945) Mécanique aléatoire Vol. 1 Fasc. 4, pages 179-294, Portugaliae Physica

G. DEDEBANT et Ph. WHERLE (1937-1939) La mécanique des fluides turbulents fondée sur des concepts statistiques Annales de l'Université de Paris, Thalès

J. KAMPE DE FERIET (1939) Les fonctions aléatoires stationnaires de la théorie statistique de la turbulence homogène Anns. Soc. Scient. Brux., 59,145

REYNOLDS (1894) On the dynamic theory of incompressible viscous fluids and... Phil. Trans. Roy. Soc. A 186,123