

Théorie de la prévisibilité

par PIERRE RAVUSSIN, D^r ès sc. techn., collaborateur scientifique

Avant-propos

Le calcul des probabilités est né d'un problème de prévisibilité concernant une partie de jeu de dés inachevée. On sait par la suite l'extension qu'il a prise et les succès de son application dans de très nombreux domaines : assurances, théorie cinétique des gaz, mécaniques statistiques diverses, etc.

Les mouvements désordonnés, discontinus, à évolution aléatoire, caractéristiques fondamentales des écoulements turbulents ont conduit les hydrodynamiciens et aérodynamiciens à employer les méthodes statistiques dans la mécanique de la turbulence. Mais, il importe de remarquer impérieusement que la suite des mouvements tourbillonnaires n'est pas régie par un hasard pur, mais au contraire par un hasard lié exprimable par des probabilités conditionnelles techniquement traduites par les corrélations des grandeurs aléatoires du fluide turbulent.

La Chaire de la Mécanique de la turbulence et le Groupe de travail EPFL-Institut suisse de météorologie effectuent des travaux théoriques et pratiques en mécanique de la turbulence.

L'étude de M. P. Ravussin, collaborateur scientifique, s'insère dans cette recherche.

L'incomparable laboratoire qu'est l'atmosphère montre des turbulences de toutes échelles. C'est pour cela que dans la préface à la présente étude, M. D^r A. Junod, chef de la Division de météorologie appliquée de l'Institut suisse de météorologie situe la « théorie de la prévisibilité » de P. Ravussin dans le contexte des deux grandes méthodes de prévision utilisées par les météorologues.

Il serait intéressant d'en essayer ultérieurement la synthèse, ou alors d'en dégager leurs caractères de complémentarité.

Professeur FRANÇOIS BAATARD.

Préface

On dit souvent, non sans quelque raison, que la météorologie tient tout autant d'un art que d'une science. Il est de fait que, dans le domaine de la prévision du temps, le jugement du météorologiste intervient en maintes phases de l'opération, en partant du choix d'un jeu caractéristique de données initiales à l'interprétation ultime d'une carte synoptique en termes de prévision régionale.

Cependant, au cours des dernières décennies, des efforts considérables ont été déployés en vue de réduire systématiquement la part subjective dans les procédures prévisionnelles, sans pour autant faire table rase de l'expérience acquise. Le développement méthodologique s'est concentré dans deux catégories principales. La première, celle de la prévision numérique du temps, met en jeu essentiellement des modèles physico-mathématiques de l'atmosphère, plus ou moins complexes mais volontairement simplifiés, reposant sur des systèmes d'équations hydrodynamiques qui ne peuvent être résolus qu'à l'aide d'ordinateurs puissants. Le résultat d'une telle prévision numérique s'exprime en répartitions spatiales à grande échelle d'éléments tels que le vent, la pression, la température, et non en une description du temps futur en tel point particulier de la surface terrestre.

Dans la deuxième catégorie de procédures prévisionnelles sont rangées diverses méthodes statistiques, de complexité fort variable suivant la nature du matériel d'observations et le genre de technique utilisée. On trouve ainsi dans cette catégorie des techniques simples comme la régression linéaire ou plus élaborées comme l'analyse discriminante multiple. Bien qu'il n'y ait pas d'incompatibilité majeure entre les deux catégories mentionnées — chacune d'elles s'appuyant sur des résultats acquis grâce à l'autre — il faut constater que les recherches dans chacune de ces catégories se sont faites séparément, jusqu'ici.

En première analyse, la « Théorie de la prévisibilité » de P. Ravussin semble se rattacher à la catégorie des méthodes statistiques car elle ne repose sur aucun modèle physique particulier et fait intervenir des schémas de calcul analogues à ceux de la statistique. Cependant, un examen plus attentif révèle que l'auteur, dépassant largement le cadre d'une nouvelle technique statistique, bâtit une théorie générale de la prévisibilité des phénomènes aléatoires. A ceux-ci appartiennent les écoulements turbulents de l'atmosphère, milieu d'élection des prévisionnistes. Il ne fait pas de doute que les météorologistes liront avec profit le présent mémoire ; ils y trouveront notamment une méthode pour « qualifier quantitativement » leurs prévisions.

ANDRÉ JUNOD

Chef de la Division de météorologie appliquée
de l'Institut suisse de météorologie

1. Introduction

Genèse du concept aléatoire de la prévisibilité

Nous trouverons dans les pages qui suivent une théorie nouvelle de la prévisibilité numérique dont les météorologistes français Dedebant et Wehrle ont perçu certains éléments dans quelques-uns de leurs essais.

Dès que l'on parle de prévision, on fait appel à la notion de causalité (« *causa efficiens* » des Anciens). En remontant à la haute antiquité, la constatation de liens célestes entre certains phénomènes terrestres, par exemple entre la position du soleil sur le zodiaque et le déroulement des saisons, aboutit à une application hâtive du principe de causalité. On attribua une signification particulière aux événements célestes qui devaient déterminer l'avenir des hommes. Ainsi naquit l'astrologie, qui avec ses lois aussi précises que mal fondées, et ses affirmations fatalistes, contribua à introduire le concept de nécessité absolue. L'interprétation mystique et animiste du mouvement des astres conduisit les philosophes antiques à la notion de cycle au bout duquel tous les phénomènes doivent se reproduire d'une façon identique et dans le même ordre. Ces concepts sont à rattacher à une théorie cosmologique concevant l'univers issu d'un « œuf » initial et qui, après une période d'expansion se recondenserait.

Historiquement parlant, l'application du concept de causalité à la règle de cause à effet est relativement récente. Actuellement, lorsque nous apprenons qu'une chose arrive, nous présupposons toujours qu'une chose a précédé, dont la première découle selon une règle.

La physique de Newton, puis de Lagrange (mécanique analytique) est ainsi conçue que l'on peut calculer à l'avance, à partir de l'état d'un système à un moment déterminé, le mouvement futur du système.

Le déterminisme est l'établissement de lois naturelles fixes qui prédisent rigoureusement l'état futur d'un système d'après l'état actuel. Ces lois sont celles de la physique générale, qui régissent l'évolution et les interactions de l'énergie, au sens le plus général, dans l'espace-temps. Ces lois sont celles par exemple du champ électromagnétique de Maxwell ou de la théorie relativiste de la gravitation d'Einstein.

La science atomique a développé des notions qui conduisent la physique générale à une impasse : c'est l'impossibilité du physicien de déterminer exactement les conditions initiales. Cette difficulté a été partiellement soulevée en faisant appel à l'idée d'un concours statistique de nombreux petits processus isolés. Il en découle que l'on considère les lois de la nature uniquement comme des lois statistiques. Ces lois peuvent cependant conduire à des affirmations d'un degré de probabilité si élevé qu'il équivaut presque à une certitude. Ce « presque » est la différence qui existe entre une loi purement déterministe et une mécanique aléatoire. Les lois statistiques signifient que l'on ne connaît qu'incomplètement les systèmes physiques dont il s'agit. La physique quantique a d'ailleurs démontré qu'il n'était pas possible de connaître exactement les données d'un système à un instant fixé (principe d'incertitude d'Heisenberg). Les thermodynamiciens présupposent une connaissance incomplète du système physique qu'ils étudient. La notion de température par exemple n'a pas de sens si l'on connaît toutes les positions et toutes les vitesses des atomes d'un gaz. Le concept de température caractérise un groupe de systèmes équivalents dont on connaît en moyenne la position et la vitesse des atomes.

Or, il existe dans la nature de nombreux phénomènes que l'on ne connaît qu'imparfaitement, soit que la loi qui

les régit ne nous est pas entièrement connue, soit que l'on n'en possède pas toutes les données, soit encore que la complexité du phénomène est telle qu'il ne nous est matériellement pas possible de l'appréhender entièrement.

Tels sont par exemple les écoulements turbulents, les phénomènes météorologiques, etc.

Ces phénomènes ne sont pas prévisibles au sens classique du terme, car l'on ne possède pas toutes les données pour résoudre le système d'équations qui les décrit : on ne peut pas calculer à l'avance quel sera l'état du système à un moment donné du futur.

L'approche classique de la prévision de tels phénomènes consiste en l'établissement d'un modèle mathématique simplifié dont la maille soit suffisamment lâche pour que les données incomplètes que l'on possède forment un système qui puisse être résolu.

On obtient ainsi une solution qui est l'évolution du modèle dans le futur.

Mais il n'est pas possible par cette méthode de dire quelle est la probabilité que cette prévision se réalise, quelle est la *prévisibilité* du phénomène étudié.

2. Mécanique aléatoire

La solution présentée dans ce travail fait appel à des concepts statistiques. Le champ de dépendance de probabilité du phénomène étudié, mesuré pratiquement par les corrélations, est le concept de base de la mécanique aléatoire.

Le relâchement du champ de dépendance de probabilité au cours du temps met en évidence la diffusion du milieu et la dissipation de son énergie : le champ de corrélation tend vers zéro.

La prévisibilité du phénomène sera d'autant plus grande que le relâchement du champ de dépendance de probabilité est plus faible.

Aux limites, la mécanique aléatoire devient d'une part une mécanique classique certaine à prévisibilité maximum ; d'autre part, elle devient une mécanique statistique à probabilités indépendantes lorsque la prévisibilité est minimum. Entre ces limites, il y a autant de mécaniques aléatoires qu'il existe de fonctions de connexion des probabilités.

3. Exemple des grandeurs aléatoires d'un phénomène

Prenons comme exemple un phénomène aléatoire transitoire (non stationnaire) : la diffusion d'une particule de fluide, c'est-à-dire une *particule aléatoire*.

L'expérience est réalisée en prenant de façon reproductible une poire en caoutchouc (**fig. 1**).

On a créé une particule aléatoire qui va diffuser dans l'espace-temps et dont l'énergie va se dissiper.

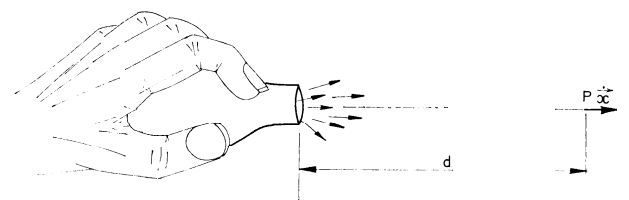


Fig. 1

Supposons que cette particule aléatoire ne nous est connue que par la composante $\vec{x}(t)$ du vecteur vitesse en un point fixe P de l'espace.

La particule aléatoire est alors définie par une *fonction aléatoire* $x(t)$ *représentative du phénomène*.

Chaque fois que l'on presse sur la poire, on crée une réalisation $x_j(t)$ de la fonction aléatoire $x(t)$.

On dit aussi que $x_j(t)$ est une *valeur de la fonction aléatoire* $x(t)$. j est la numérotation de la réalisation.

$x_j(t)$ est une fonction réelle du temps t .

La fonction aléatoire $x(t)$ est représentée par l'ensemble des réalisations possibles $x_j(t)$ (fig. 2).

Considérons ce qui se passe à un instant donné t_u : $x = x(t_u)$ est une *variable aléatoire*.

$$x(t_u) = Ux_j(t_u)$$

Soit k le nombre de réalisations $x_j(t_1)$ possible ($j = 1, \dots, k$).

Supposons que l'on ait trouvé k_1 fois la valeur de a_1 , k_2 fois la valeur a_2 , etc., k_e fois la valeur a_e , avec $k = k_1 + k_2 + \dots + k_e$;

par exemple : $x_1 = x_2 = \dots = x_{k_1} = a_1$

$$x_{k_n+1} = x_{k_n+2} = \dots = x_{k_n+k_e} = a_e$$

Alors $p_1 = k_1/k$ est la *probabilité* que la variable aléatoire x , ait une réalisation x de valeur a_1 .

Alors

$$\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{i=e} p_i a_i \quad \text{est la valeur moyenne}$$

ou *moment de premier ordre* de la variable aléatoire X .

En généralisant on obtient

$$\bar{X} = \sum p_j x_j$$

en passant au cas continu

$$\bar{X}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) p(x/t) dx$$

C'est la valeur moyenne de la fonction aléatoire X au temps t , ou moment au premier ordre au temps t .

C'est une intégrale au sens de Lebesgue (fig. 3).

4. Mesure et échelle d'observation

La *mesure* est l'élément clef de toute étude scientifique.

Dans l'hypothèse déterministe, la mesure permet de comparer le phénomène étudié avec le modèle physique. Dans le cas aléatoire, c'est de la mesure que l'on tirera le champ de dépendance de probabilité caractéristique du phénomène.

Dans les phénomènes naturels, on n'a en général accès qu'à une seule réalisation x_j .

Soit $X^*(t)$ la *mesure* d'un phénomène aléatoire *représentable* par la fonction aléatoire $x(t)$.

Revenons à l'exemple : pour effectuer la mesure, nous sommes obligés d'introduire un capteur qui occupe un volume d'épreuve ΔV autour du point P et dont la constante de temps vaut At (fig. 4).

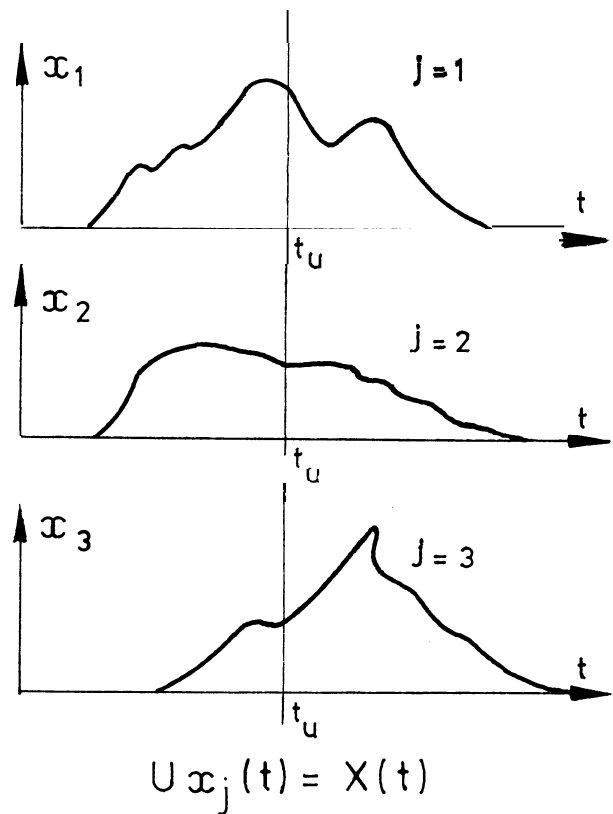


Fig. 2

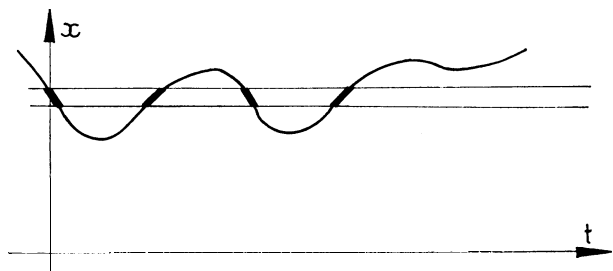


Fig. 3

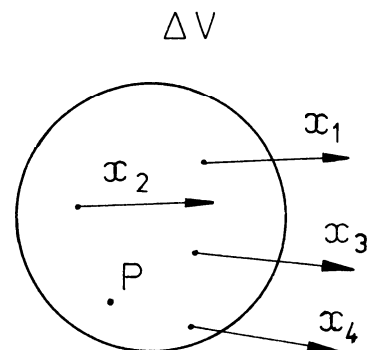


Fig. 4

Soit $X_j^*(t)$ la j^e mesure au point P

$$X_j^*(P, t) = \frac{1}{AV\Delta t} \iiint_{V-AV} \int_{t-At}^t x_j(P, t) dV dt \quad (\text{en négligeant les erreurs de mesure})$$

C'est la moyenne spacio-temporelle, autour du point P , vers l'instant t , de la j^e réalisation d'une fonction aléatoire spacio-temporelle $x(P, t)$ dont $\mathbf{x}(t)$ est une des composantes. Par définition $X_j^*(P, t) \neq \bar{x}(t)$ au point P sauf éventuellement pour certaines valeurs particulières de P et de t .

Car $\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(t) p(x/t) dx$: c'est la moyenne « à travers le processus » de toutes les réalisations x_j possibles : $x_j = 1, \dots, k$.

Par contre, $X_j^*(t)$ est la moyenne « le long du processus » non seulement d'une réalisation particulière $x_j(t)$ de $\mathbf{x}(t)$ ($j = n$), mais aussi d'un certain nombre de réalisations particulières $x_j(P, t)$ ($j = 1, \dots, n$) autour du point P d'un certain nombre de fonctions aléatoires $\mathbf{x}(P, t)$.

On posera de manière générale

$$\mathbf{x}(t) = X_j^*(t) + x_j^*(t)$$

où

$x(t)$: fonction aléatoire du temps
 $X_j^*(t)$: mesure de la réalisation j
 $x_j^*(t)$: terme complémentaire

$$\text{Posons} \quad x = \bar{x} + x' \\ x^* = \bar{x}^* + x'^*$$

\bar{x}, \bar{x}^* : valeurs moyennes

x', x'^* : valeurs purement aléatoires

Par définition $X^* = \bar{X}^*$

$$\text{Alors} \quad \bar{x}(t) = X_j^*(t) + \bar{x}_j^*(t) \\ \mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}'_j(t)$$

Ce qui précède entraîne l'énoncé des théorèmes suivants :

Théorème 1

Une mesure $X_j^*(t)$ d'une réalisation d'une fonction aléatoire $x(t)$ est en général différente de la valeur moyenne de cette fonction.

Théorème 2

La partie purement aléatoire $x_j'^*(t)$ du terme complémentaire de la mesure d'une réalisation quelconque $x_j(t)$ est égal à la partie purement aléatoire $\mathbf{x}'(t)$ de la fonction aléatoire elle-même.

AV et At définissent l'échelle d'observation ou « l'étage » observé d'un phénomène aléatoire.

I. Espace aléatoire

§1. Introduction

La mécanique aléatoire est basée sur un élément appelé variable aléatoire, dont nous avons vu une définition particulière précédemment. Nous allons généraliser sa définition et en rappeler les propriétés.

§2. Variable aléatoire

Définition

On appelle variable aléatoire X un ensemble d'éléments x , appelés valeurs ou réalisations de la variable aléatoire.

n est la numérotation de la réalisation

$$n = 1, \dots, n$$

Les x , sont souvent les composantes d'un vecteur. On les notera alors x_{n_i} ; par exemple $i = 1, \dots, 4$ vecteur spatio-temporel.

Alors : en un point P de l'espace et au temps t il existe n valeurs x , définissant une variable aléatoire X en ce point et à cet instant.

§3. Champ de dépendance de probabilité

Définition 1

On appelle densité de probabilité $p(x_n)$ la fréquence relative d'apparition de la valeur x , de la variable aléatoire X .

$$p(x_n) = \frac{k_n}{k}$$

k_n : nombre de réalisations identiques à x ,

k : nombre total de réalisations de X

Considérons maintenant deux variables aléatoires X^1 et X^2 (par exemple en deux points de l'espace-temps) définies par des paires x_n^1, x_n^2 de valeurs.

Définition 2

On appelle densité de probabilité composée $p(x_m^1, x_m^2)$ la fréquence relative d'apparition de la paire

$$p(x_m^1, x_m^2) = \frac{k_m}{k_{12}}$$

On écrit aussi $p(x_m^1 \cap x_m^2)$.

k_m : nombre de réalisations de paires identiques à la paire x_m^1, x_m^2

k_{12} : nombre total de réalisations de paires de X^1 et X^2

Définition 3

On appelle densité de probabilité conditionnelle $p(x_m^1/x_n^2)$ le rapport des fréquences relatives d'apparitions des paires x_m^1, x_n^2 et de la valeur x_n^2 ;

avec $x_m^2 = x_n^2$

alors

$$p(x_m^1/x_n^2) = \frac{p(x_m^1, x_n^2)}{p(x_n^2)}$$

Définition 4

On appelle densité de probabilité totale $p(x_m^1 \cup x_m^2)$ la grandeur définie par

$$p(x_m^1 \cup x_m^2) = p(x_m^1) + p(x_m^2) - p(x_m^1, x_m^2)$$

Définition fondamentale

Le champ de dépendance de probabilité ou champ de probabilité composé (par exemple dans l'espace spatio-temporel) est défini au moyen de l'ensemble des variables aléatoires X^C dans cet espace par l'ensemble des couples x^C, x^D des réalisations de ces variables.

Remarque 1

Lorsque les réalisations d'une variable aléatoire ont plusieurs composantes, on peut écrire :

$$P(x_{n_i}) = P(x_{n_1} \cap x_{n_2} \dots \cap x_{n_i})$$

alors

$$p(x_{n_1}^1 \cap x_{n_1}^2) = p(x_{n_1}^1 \cap x_{n_2}^2 \cap \dots \cap x_{n_i}^1 \cap x_{n_1}^2 \cap \dots \cap x_{n_i}^2)$$

La probabilité composée d'une paire de valeurs est égale à la probabilité composée des composantes de ces valeurs.

On écrira $X = X(X_1, \dots, X_i)$

les X_i étant eux-mêmes des variables aléatoires.

Remarque 2

On dit que deux variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si

$$p(x^1, x^2) = p(x^1) \cdot p(x^2)$$

pour tout x^1 et pour tout x^2 ;

alors $p(x^1/x^2) = p(x^1)$

pour tout x^1 et pour tout x^2 .

Remarque 3

On considère souvent les variables aléatoires $X(X_1, \dots, X_i)$ pour des valeurs particulières x_j d'une ou de plusieurs composantes $X_j (j \leq i)$.

On parle alors de *fonctions aléatoires*

$$X(X_1, \dots, X_k, x_{k+1}, \dots, x_j) \quad (k + j = i)$$

les x_j sont appelés alors des *paramètres*.

On écrira $x(x_{k+1}, \dots, x_j)$ comme *fonction paramètre*.

La probabilité des réalisations x_1, \dots, x_k pour les valeurs x_{k+1}, \dots, x_j est une probabilité conditionnelle.

$p(x_1, \dots, x_k/x_{k+1} \dots x_j)$ est la probabilité d'avoir les valeurs $x_1 \dots x_k$ lorsque les valeurs $x_{k+1} \dots x_j$ ont été réalisées.

Il n'est donc pas possible, si ce n'est par une convention d'écriture, de distinguer une fonction aléatoire d'un paramètre, d'une variable aléatoire à deux dimensions.

$$X(x_2) \longleftrightarrow X(X_1, X_2)$$

Remarque 4

Les mesures ne permettent d'obtenir que les probabilités conditionnelles $p(x_1 \dots x_k/t)$ probabilités au temps t .

Définition 5

On appelle *moment du 1^{er} ordre* ou *moyenne*, les relations

$$1) \bar{X}_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_i p(x_1 \dots x_j) dx_1 \dots dx_j \quad i = 1, \dots, j$$

Définition 6

On appelle *moment du 2^e ordre* ou *moyenne quadratique*

$$2) \overline{X_i X_k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_i x_k p(x_1 \dots x_j) dx_1 \dots dx_j \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, j \\ k = 1, \dots, j \end{matrix}$$

Remarque 5

Sachant que $p(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1 \dots x_j) dx_2 \dots dx_j$

les relations 1) et 2) s'écrivent :

$$\bar{X}_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i p(x_i) dx_i \quad \text{moment du 1^{er} ordre}$$

$$\bar{X}_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2 p(x_i) dx_i \quad \text{moment du 2^e ordre}$$

$$\overline{X_i X_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_i x_j p(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad \text{moment composé du 2^e ordre}$$

La densité de probabilité composée n'intervient que dans le moment composé du 2^e ordre.

Remarque fondamentale

Le moment composé du 2^e ordre étant une grandeur réelle, nous avons là un moyen de mesure de l'état de champ de dépendance de probabilité.

Définition 7

Nous appelons *coefficient de corrélation* le moment composé du 2^e ordre normalisé.

$$\rho_{ij} = \frac{\overline{(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)}}{\sqrt{(\bar{X}_i^2 - \bar{X}_i^2)(\bar{X}_j^2 - \bar{X}_j^2)}} = \frac{\overline{X_i X_j} - \bar{X}_i \bar{X}_j}{\sigma_i \sigma_j}$$

avec

$$a = \sqrt{\bar{X}_i^2 - \bar{X}_i^2} = \sigma, \text{ écart type}$$

Définition 8

Une variable aléatoire peut être représentée par un *vecteur aléatoire* \vec{X} qui est défini dans l'espace aléatoire par sa norme $\|X\|$

avec $\|X\|^2 = \langle X | X \rangle = \bar{X}^2$

Le vecteur aléatoire représente dans l'espace aléatoire l'état physique d'un phénomène physique pour des valeurs particulières des paramètres x_j .

$$\bar{X}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x/x_1 \dots x_j) dx$$

Le vecteur aléatoire peut être décomposé en un vecteur certain \vec{X} et un vecteur purement aléatoire \vec{X}' orthogonal au premier.

On doit donc avoir $\|X\|^2 = \|\bar{X}\|^2 + \|X'\|^2$

avec $\|\bar{X}\| = \bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x/x_1 \dots x_j) dx$

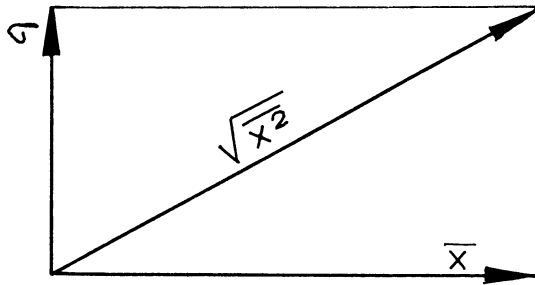


Fig. 5

d'où $\|X'\| = \sqrt{X^2 - \bar{X}^2} = \sigma$ écart type (fig. 5)

Définition 9

La dépendance de probabilité entre les deux états X_1 et X_2 du phénomène physique sera représenté dans l'espace aléatoire par l'angle a que forment les composantes aléatoires \vec{X}'_1 et \vec{X}'_2 des vecteurs \vec{X}_1 et \vec{X}_2 , les composantes réelles étant portées par la droite réelle.

Considérons la variable aléatoire X pour une valeur différente des paramètres x_j , noté X_2 .

La mesure de cet angle est donnée par (fig. 6) :

Or $\cos \alpha_{12} = \rho_{12}$ coefficient de corrélation

$$\cos \alpha_{12} = \frac{\vec{X}'_1 \cdot \vec{X}'_2}{\|\vec{X}'_1\| \|\vec{X}'_2\|}$$

d'où $\vec{X}_1 \vec{X}_2 = \bar{X}_1 \bar{X}_2 - \bar{X}_1 \bar{X}_2$ produit scalaire.

Définition 10

n variables aléatoires $X_i (i = 1, \dots, n)$ définissent un espace aléatoire à $n + 1$ dimensions, au plus, composé de la droite réelle, orthogonale à un espace purement aléatoire à n dimension, au plus.

II. Prévisibilité d'une fonction aléatoire le long d'une trajectoire

§1. Trajectoire dans l'espace des paramètres

Définition 1

Les paramètres $x_1 \dots x_j$ forment une base orthogonale dans l'espace euclidien.

On suppose donc que les paramètres forment un système linéairement indépendant d'ordre j .

Il est alors impossible de trouver j nombres X_j , non tous nuls tels que

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_j \vec{x}_j = 0$$

Il existe une base orthogonale telle que

$$\vec{x} = x^1 \vec{x}_1 + x^2 \vec{x}_2 + \dots + x^j \vec{x}_j$$

avec $\vec{x}_1 = (x_1, 0, \dots, 0)$

$\vec{x}_2 = (0, x_2, \dots, 0)$

$\vec{x}_j = (0, 0, \dots, x_j)$

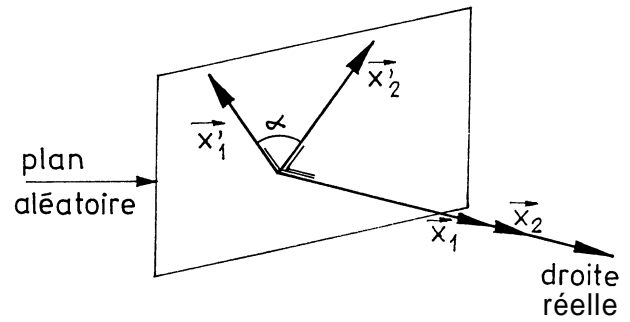


Fig. 6

Remarque 6

Le champ de dépendance de probabilité du phénomène physique n'apparaît plus dans l'espace aléatoire que sous la forme intrinsèque des moments du 1^{er} et du 2^e ordre.

Remarque 7

Si la dépendance de probabilité est maximum, $\rho = 1 \rightarrow a = 0$: les deux vecteurs \vec{X}'_1 et \vec{X}'_2 sont confondus. S'il n'y a pas de dépendances de probabilité entre les états X_1 et X_2 , alors $\rho = 0$, $a = \frac{\pi}{2}$

Les vecteurs \vec{X}_i et \vec{X}_i sont perpendiculaires.

Espace aléatoire des probabilités indépendant, champ de corrélation nul.

Remarque 8

L'espace aléatoire satisfait aux conditions de l'espace de Hilbert.

Soit S une courbe régulière dans l'espace des paramètres x_j d'équation.

$$x^i = x^i(t) \quad i = 1, \dots, j$$

ou $\vec{r}(x^1, x^2, \dots, x^j)$ avec $r'(t) \neq 0$ (fig. 7)

Alors il existe en tout point de S un repère naturel tangent

$$dr = \vec{r}'(t) dt$$

de composante $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_j$, vecteurs unitaires.

Nous pouvons alors introduire sur cette courbe une métrique ds avec

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

et

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

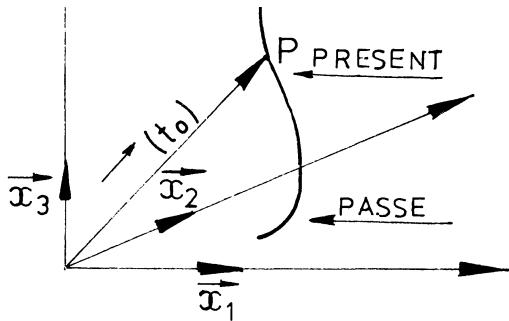


Fig. 7

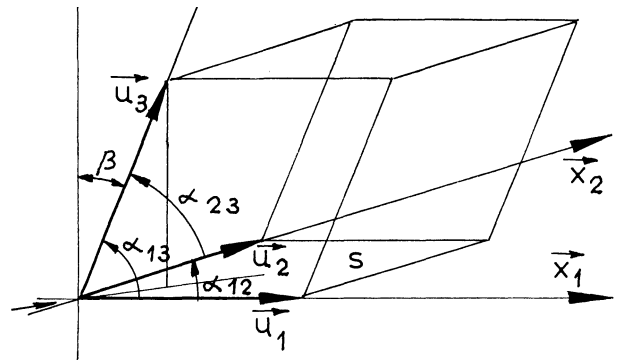


Fig. 8

Définition 2

Soit sur la courbe S un point P appelé *présent* correspondant à la valeur t_0 . Nous appellerons *futur* la demi-courbe définie par

$$\int_P^F ds > 0$$

F : point du futur
Alors

$$\widehat{PF} = \int_{t_0}^F \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

Définition 3

Nous appellerons *passé* la demi-courbe définie par

$$\int_A^P ds > 0$$

A : point du passé

§ 2. Mesure du relâchement du champ de dépendance de probabilité

Soit une suite de vecteurs aléatoires \vec{X}_i représentant les états successifs d'un phénomène physique le long de la trajectoire S .

Si le phénomène est suffisamment cohérent, les \vec{X}_i définissent un espace de Hilbert à $i + 1$ dimensions, dans lequel le champ de dépendance de probabilité est représenté par tous les coefficients de corrélation.

$$\rho_{ij}(X_i, X_j) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, k \\ j = 1, \dots, k \end{matrix}$$

Définition 1

La dépendance de probabilité d'un vecteur aléatoire par rapport aux vecteurs précédents est donnée par un *coefficient de corrélation multiple* R

avec $R^2 = \begin{vmatrix} 1 & & \rho_{ij} \\ & \cdot & \\ \rho_{ji} & & 1 \end{vmatrix}$ déterminant des ρ_{ij} d'ordre k

R est la mesure d'hypervolume à k dimensions formé sur la base unitaire purement aléatoire \vec{u}_i

avec $\vec{u}_i = \frac{\vec{X}'_i}{\|\vec{X}'_i\|} = \frac{\vec{X}'_i}{\sigma_i}$

En passant à la limite, on obtient la fonction ressemblance $R(t)$ du phénomène aléatoire le long de la trajectoire $S(t)$.

$0 \leq R \leq 1$ en vertu des propriétés de l'espace vectoriel aléatoire (inégalité de Schwarz);

en outre, R décroît lorsque t croît, car pour chaque augmentation infinitésimale dt de t ,

on multiplie R par un terme $0 \leq \Gamma \leq 1$

où $\Gamma = \cos \beta$, cosinus de l'angle que forme le nouveau vecteur \vec{u} avec la normale à l'hypervolume précédent. De plus, à l'origine :

$$R = \rho_{11} = 1 \quad (\text{fig. 8})$$

$R(t)$ est donc une fonction monotone, décroissante, bornée.

$$R_1 = 1$$

$$R_2 = \left| \begin{matrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - \rho_{12}^2} = \sin \alpha_{12} = S \text{ surface}$$

$$R_3 = \left| \begin{matrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}} = V \text{ volume}$$

$$R_3 = \sqrt{(1 - \rho_{12}^2) + (1 - \rho_{13}^2) + (1 - \rho_{23}^2) - 2(1 - \rho_{12} \rho_{13} \rho_{23})}$$

$$\frac{R_3}{R_2} = \cos \alpha$$

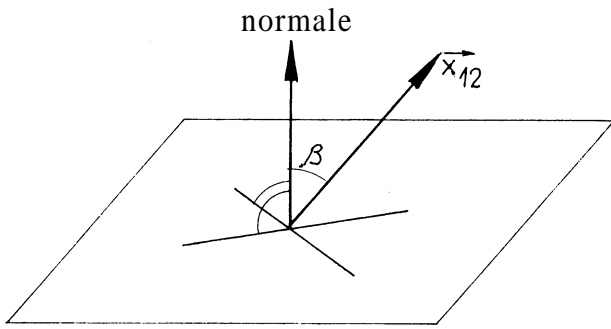


Fig. 9. — Hypervolume du passé

Remarque 1

$R = \text{cte} = 1$ signifie que les dépendances de probabilité sont nulles : il n'y a aucune liaison entre les différents états du phénomène le long de la trajectoire S (fig. 9).

Si le $k^{\text{ème}}$ vecteur est situé dans le futur immédiat, on peut représenter l'espace aléatoire par la figure ci-dessous.

Définition 2

On appelle *Inconnexe J* la mesure du champ de dépendance de probabilité.

$$J = \sin \beta$$

d'où

$$J^2 = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{|\rho_{ij}|^{(\infty+1)}}{|\rho_{ij}|^{(\infty)}}$$

Remarque

$J = 1$ si et seulement si $|\rho_{ij}|^{(\infty+1)} = 0$

car $|\rho_{ij}|^{(\infty+1)} \leq |\rho_{ij}|^{(\infty)}$

alors $\rho_{i(\infty+1)} = 1 \quad i = 1, \dots, \infty + 1$ et $\beta = 0$.

En ce point, la dépendance de probabilité est maximum.

J est défini sur un élément ds de la courbe S . En effet, on peut écrire sans autre

$$J = \sqrt{1 - \frac{|\rho_{ij}|^{(t+dt)}}{|\rho_{ij}|^{(t)}}}$$

Théorème 1

$J(t)$ est une fonction monotone bornée de bornes 0 et 1 (fig. 10)

$$0 \leq J \leq 1$$

car $|\rho_{ij}|^{(t+dt)} \leq |\rho_{ij}|^{(t)}$ et $0 \leq |\rho_{ij}|^{(t)} \leq 1$

Définition 3

On appelle *fonction connaissance K(t)* la fonction duale de la fonction ressemblance $R(t)$.

Soit \vec{X}^o, \vec{X}^t deux vecteurs de l'espace aléatoire
 \vec{X}^{i+t} le vecteur correspondant de l'espace dual.
 $\vec{U}^o \vec{U}^t = \cos \alpha$
 $\vec{U}^o \vec{U}^{i+t} = \cos \alpha^+$
 avec $\cos \alpha^+ = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha$

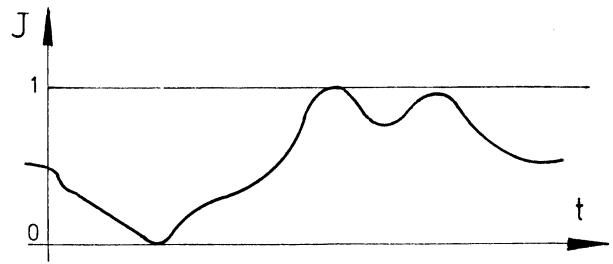


Fig. 10

\vec{U} = vecteur unitaire.

Alors

$$K^2 = \begin{vmatrix} 1 & & \cos \alpha_{ij}^+ \\ & \ddots & \\ \cos \alpha_{ij}^+ & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & \sqrt{1 - \rho_{ij}^2} \\ & \ddots & \\ \sqrt{1 - \rho_{ij}^2} & & 1 \end{vmatrix}$$

$K(t)$ est une fonction monotone, décroissante, bornée, de bornes 0 et 1. Car

$$0 \leq \cos \alpha_{ij}^+ \leq 1$$

Remarque 3

K varie d'autant plus lentement que la dépendance de probabilité est grande (fig. 11).

En effet, $\rho \cong 1$ et $\sqrt{1 - \rho^2} \cong 0$.

Pour chaque augmentation dt de t , on multiplie K par

un terme $\sim 1 \leq \Delta \leq 1$ avec $\cos \beta^+ = \Delta$.

L'inconnexe se calcule alors par

$$J = \frac{K(t+dt)}{K(t)} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

d'où

$$\beta^+ = \frac{\pi}{2} - \beta$$

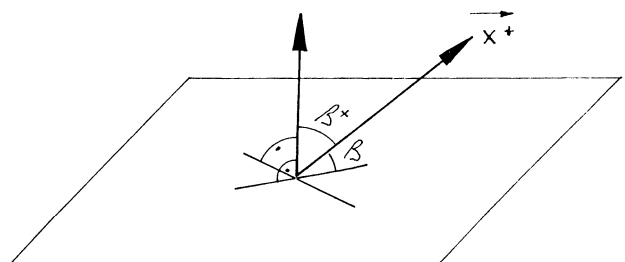


Fig. 11. — Hypervolume dual du passé

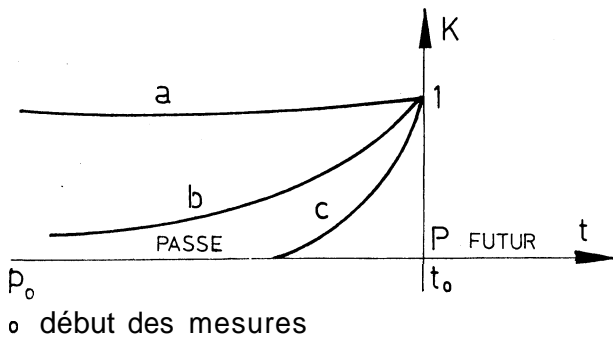


Fig. 12

- a) phénomène ayant une forte dépendance de probabilité ;
- b) phénomène ayant une dépendance de probabilité plus faible ;
- c) phénomène n'ayant aucune dépendance de probabilité avec le passé lointain.

Calculons K à partir du présent P vers le passé.

La fonction K mesure la connaissance que l'on a du phénomène au cours du temps, celle-ci étant normalisée à 1 au présent (fig. 12).

Postulat de prévisibilité

Le degré de prévisibilité du futur proche est égal à l'influence du passé proche sur le présent, c'est-à-dire à son degré de connaissance.

$$P(\Delta t + t_0) = K(t_0 - \Delta t)$$

Remarque 4

Le degré de connaissance augmente du passé jusqu'au présent où il vaut 1, puis la connaissance « diffuse » dans le futur et tend vers zéro (fig. 13).

Remarque 5

Le postulat reste d'autant plus vrai que la fonction est plus prévisible.

En effet, à la limite, il est vrai pour tout t lorsque

$$K(t) = \text{constante} = 1$$

Théorème 2

Le postulat est vrai quel que soit At pour une classe particulière de variables aléatoires dont les fonctions K sont identiques, quelle que soit l'origine t_0 à partir de laquelle on les calcule (stationnarité en prévisibilité).

$$\text{Si } K(t_{01} - \Delta t) = K(t_{02} - \Delta t),$$

$$\text{alors } K(t_0 - t) = P(t_0 + t)$$

quelque soient t et t_0, en vertu des propriétés de permutation de lignes et de colonne dans les déterminants (fig. 14).

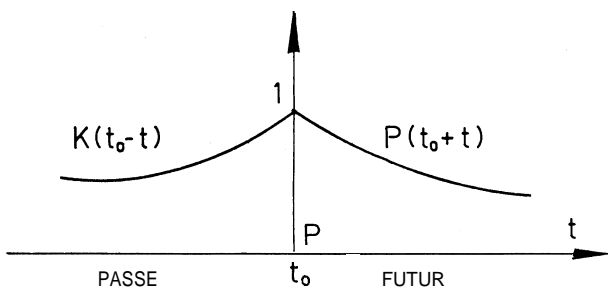


Fig. 13

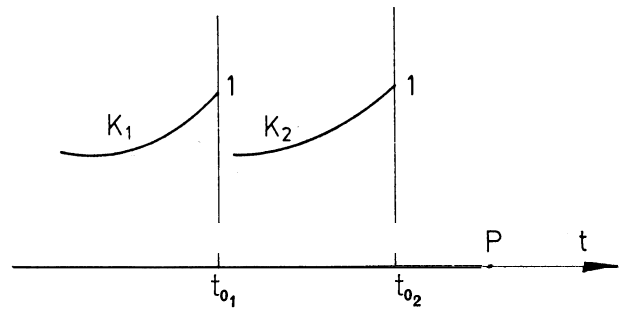


Fig. 14

Définition 4

Le coefficient de prévisibilité \mathcal{I} est défini par la relation suivante :

$$\frac{1}{\mathcal{I}} = - \frac{1}{P} \frac{\delta P}{\delta t}$$

d'où

$$\mathcal{I} = \frac{dt}{1-J} \leq \infty$$

J : inconnexe (calculée à partir du présent vers le passé).

Remarque 6

\mathcal{I} a la dimension de t.

$\mathcal{I} \geq 0$ car $P \geq 0$ et $\frac{\delta P}{\delta t} < 0$ (même démonstration que pour R).

En posant $t_0 = 0$, on peut écrire :

$$P = e^{-\int_0^t \frac{1}{\mathcal{I}} dt}$$

§3. Forme particulière

Si $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 = \text{cte}$, alors

$$P = e^{-\frac{1}{\mathcal{I}_0} t} \text{ et } \mathcal{I}_0 = - \frac{dt}{\ln J}$$

La dépendance de probabilité ne varie pas au cours du temps, donc P ne dépend pas de l'origine t_0 choisie.

Définition 5

La loi de dépendance de probabilité en chaîne de Markov est un modèle particulier défini par

$$R^2(n\Delta t) = \begin{vmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^n \\ \rho & 1 & \rho & & \\ \rho^2 & \rho & 1 & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot \\ \rho^n & & & & 1 \end{vmatrix} = (1-\rho^2)^n$$

avec $t = n\Delta t$

At : période d'échantillonnage.

Théorème 3

Dans la loi en chaîne de Markov, l'inconnexe est égal au coefficient de corrélation.

$$K^2(t) = \begin{vmatrix} 1 & & \sqrt{1-\rho^{2n}} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \sqrt{1-\rho^{2n}} & & 1 \end{vmatrix} = \rho^{2n}$$

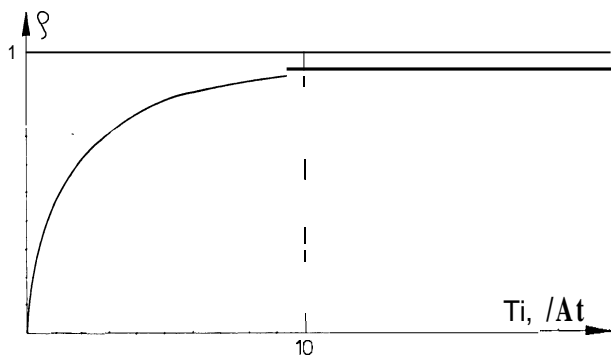


Fig. 15. — Prévisibilité.

$$\text{d'où } K(t) = \rho^{t/\Delta t} \text{ et } \Pi = - \frac{\Delta t}{\ln \rho}$$

donc $p = J$.

La loi de Markov suppose que le coefficient de prévisibilité est constant. La loi ne tient compte que de l'influence du passé proche sur le présent et ceci est une manière particulière.

La figure 15 montre que la constante de prévisibilité normalisée par rapport à la période d'échantillonnage ΔT n'atteint des valeurs élevées que pour des valeurs élevées de p .

La figure 16 montre la fonction prévisibilité pour diverses valeurs de p .

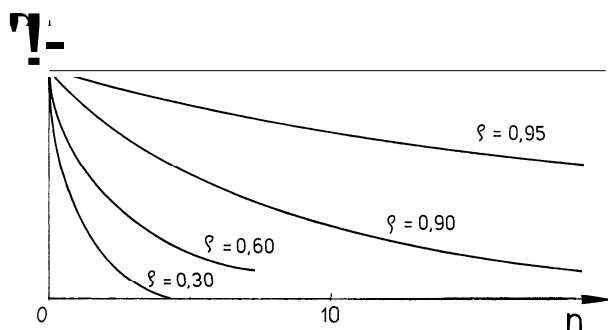


Fig. 16

§ 4. Applications numériques

Diverses données météorologiques de l'année 1967 provenant de la station aérologique de Payerne ont été traitées sur l'ordinateur du centre de calcul de l'EPFL.

Chaque série comprend 730 données correspondant aux valeurs diurnes (midi) et nocturnes (minuit). Les résultats ont été exprimés au moyen de graphiques.

La figure 17 représente les fonctions d'autocorrélation.

On constate que l'allure de la fonction d'autocorrélation ne donne aucune indication quant à la prévisibilité du phénomène.

En effet, des courbes d'autocorrélation très semblables comme celle de la pression barométrique à la surface et de la température de la tropopause, correspondent à des phénomènes très différents au point de vue de la prévisibilité.

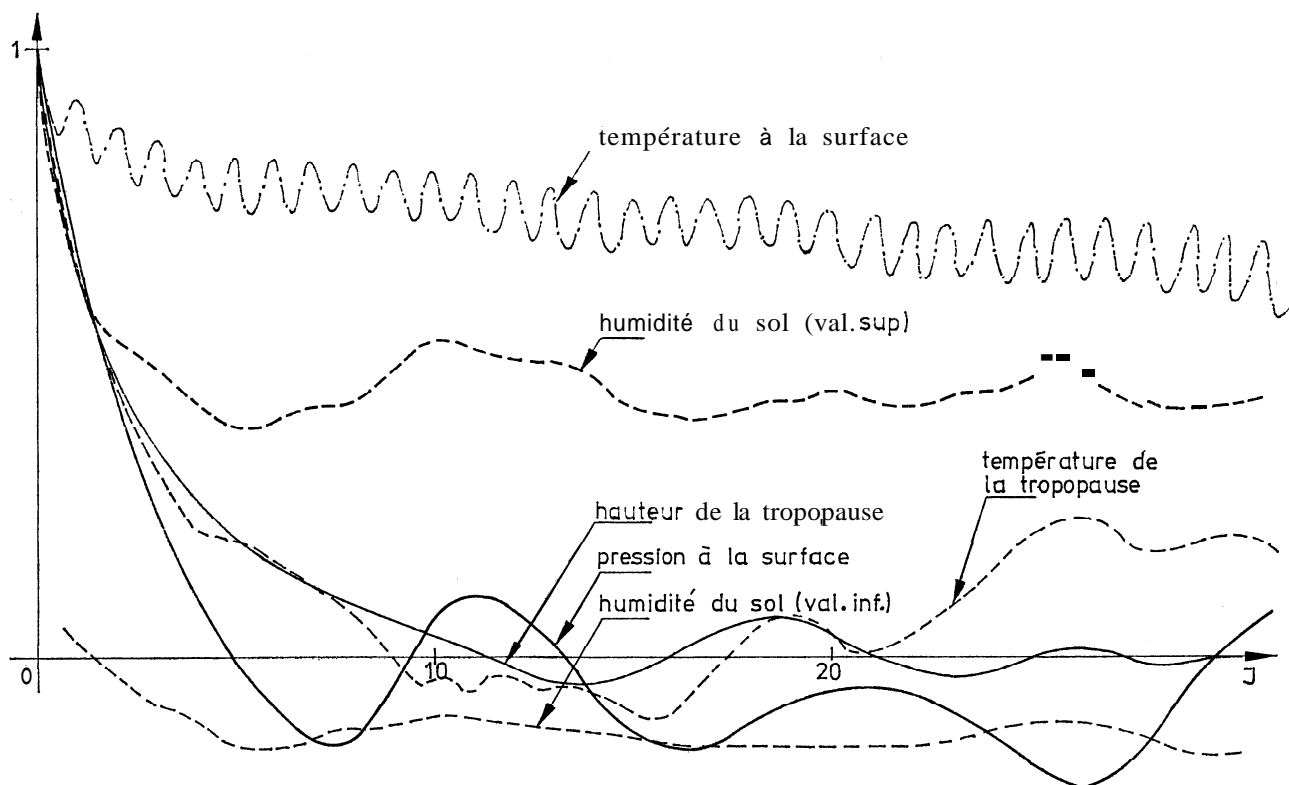


Fig. 17. — Autocorrélation.

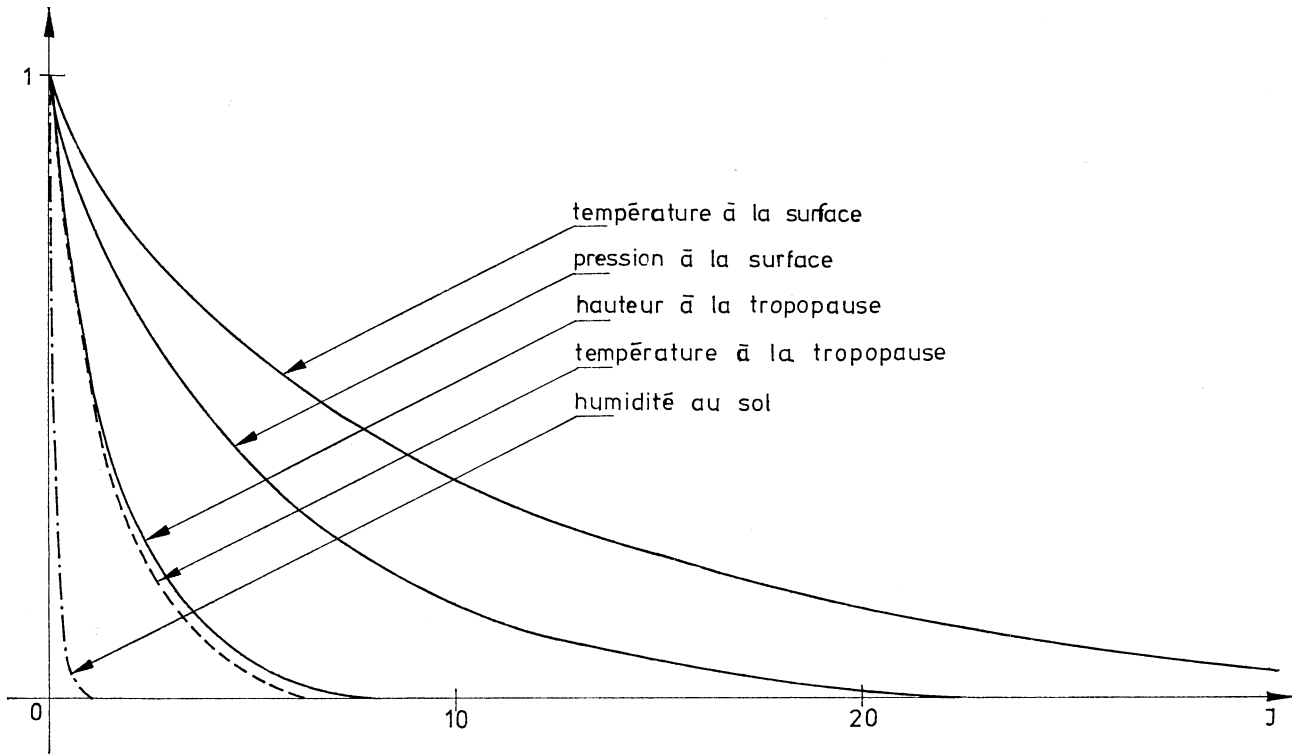


Fig. 18. — K Connnaissance.

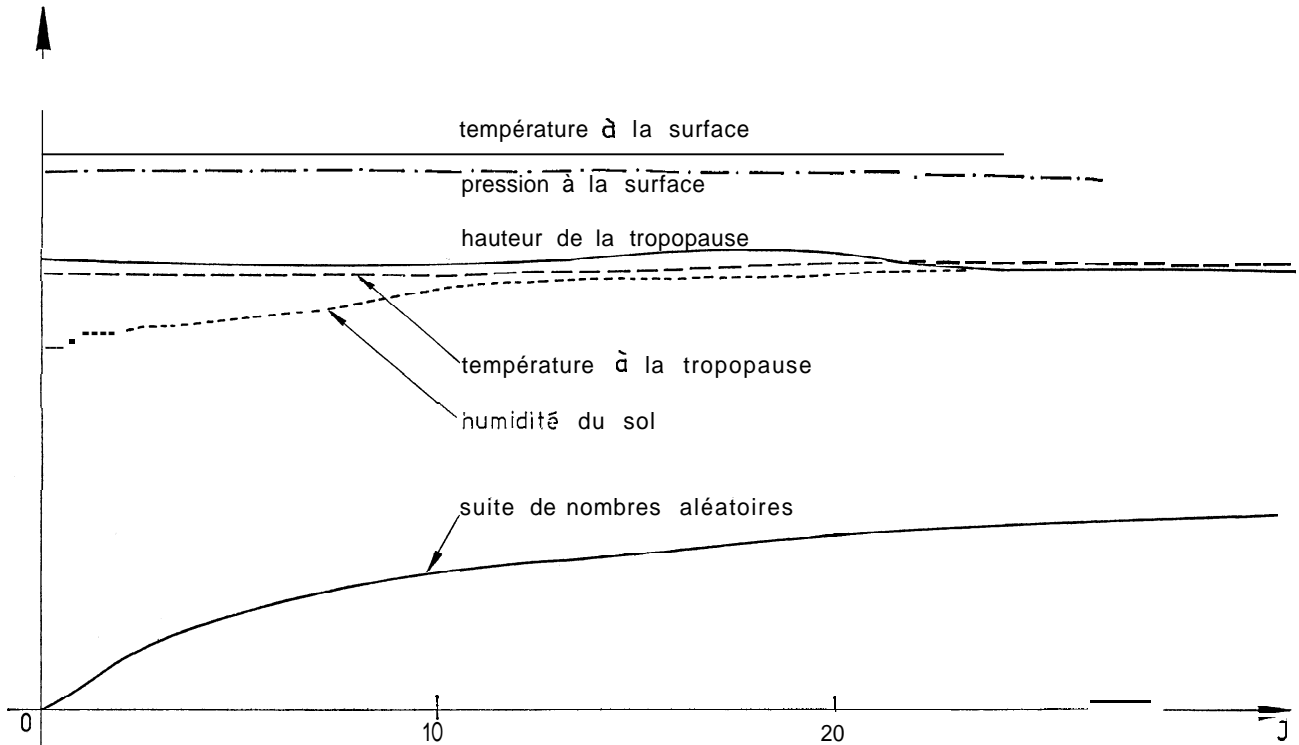


Fig. 19 — J Inconnexe.

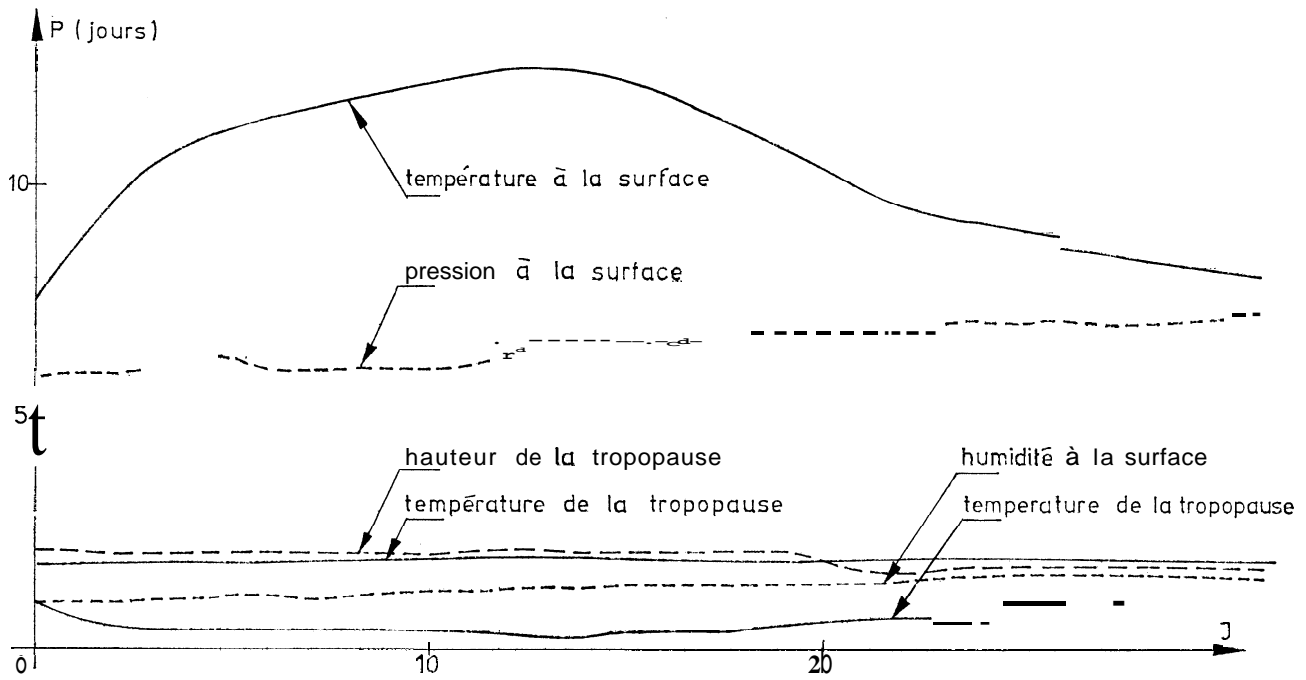


Fig. 20. — P Prévisibilité.

On remarque une fluctuation de la fonction d'autocorrélation correspondant aux valeurs diurnes et nocturnes. Cette fluctuation peut être très faible (température de la tropopause), faible (température au sol) ou, au contraire, très prononcée (humidité au sol) suivant la nature du phénomène mesuré.

La figure 18 représente les fonctions connaissances. Elles décroissent d'autant plus lentement que le phénomène est plus prévisible, que les dépendances de probabilité sont plus grandes. On constate que la température donne encore une valeur non négligeable après un mois. Au contraire, les mesures faites dans la tropopause et encore plus, les mesures d'humidité au sol donnent une fonction connaissance qui décroît très rapidement.

La figure 19 montre l'inconnexe.

On constate que l'inconnexe est *grosso modo* une constante même pour des phénomènes aussi peu prévisibles que les mesures dans la tropopause. Ce n'est que pour les mesures d'humidité et les calculs faits avec une suite de nombres aléatoires que l'inconnexe devient une fonction nettement croissante.

III. Préviation d'une fonction aléatoire

§ 1. Conditions d'établissement d'une préviation

Le phénomène physique représenté par la fonction aléatoire $x(t)$ nous est connu par les mesures $X^*(t)$.

S'il s'agit d'une expérience (cf. fig. 1), il est possible d'obtenir les moments de divers ordres « à travers le phénomène ».

Dans l'exemple de la figure 1, nous avons une série de mesures :

$$\text{alors } X_i^*(t) \quad i = 1, \dots, j$$

La figure 20 représente la fonction prévisibilité. Cette fonction est *grosso modo* une constante pour la plupart des phénomènes mesurés, ce qui veut dire qu'ils peuvent être représentés par la théorie en chaîne de Markow. Mais, par contre, la température au sol a une fonction prévisibilité nettement différente. La loi de dépendance de probabilité de cette grandeur est différente et plus compliquée que celle des autres grandeurs physiques mesurées.

Conclusion

Les calculs effectués avec des grandeurs naturelles montrent que la température peut être assimilée à peu près à un modèle de Markow, en variations diurnes et nocturnes près, tandis que la pression au sol est un phénomène de nature totalement différente.

Pour chaque type de phénomène aléatoire, on trouvera des familles de courbes différentes, représentatives de la diffusion du champ de dépendance de probabilité.

$$\text{— Moment d'ordre } n \quad \overline{X^{*n}(t)} = \frac{1}{j} \sum_1^j X_i^{*n}(t)$$

— Moment le long du phénomène

$$\overline{X^*(t) X^*(t + At)} = \frac{1}{j} \sum_1^j X_i^*(t) X_i^*(t + At)$$

S'il s'agit d'un phénomène naturel, nous n'avons droit souvent qu'à une seule réalisation $x_1(t)$, donc à une seule mesure $X_1^*(t)$.

Dans ce cas, pour pouvoir effectuer la prévision, il faut au moins supposer que la fonction aléatoire est stationnaire dans un intervalle de temps Δt_1 ,

avec $\Delta t_1 \ll \Delta t_2$

Δt_2 : durée de la mesure.

En vertu du principe ergodique, il est alors possible de remplacer les moyennes « à travers le processus » par les moyennes « le long du processus » dans l'intervalle Δt_1 .

Ainsi

$$\overline{X^{*n}(t')} = \frac{1}{\Delta t_1} \int_{t-\Delta t_1}^t X^{*n}(t) dt$$

$$\overline{X^*(t') X^*(t' + \Delta t)} = \frac{1}{\Delta t_1} \int_{t-\Delta t_1}^t X^*(t) X^*(t + \Delta t) dt$$

avec

$$t - \Delta t_1 \leq t' \leq t$$

On appelle alors :

$$\rho_{t, \Delta t} = \frac{\overline{X^*(t) X^*(t + \Delta t) - X^*(t) \cdot X^*(t + \Delta t)}}{\sqrt{[X^{*2}(t) - X^*(t)^2] [X^{*2}(t + \Delta t) - X^*(t + \Delta t)^2]}}$$

la fonction d'autocorrélation (le long du phénomène).

Remarque 1

$\rho_{t, \Delta t}$, calculé à partir du présent vers le passé, sert à déterminer la fonction prévisibilité.

Remarque 2

On ne peut pas sans autre effectuer les calculs de ρ sur une mesure $X^*(t)$, car il existe le plus souvent une fonction certaine sous-jacente dont la moyenne « à travers le processus » est différente de la moyenne « le long du processus », sinon on remplacerait la fonction certaine par une fonction aléatoire stationnaire dont les moments sont égaux aux moyennes de la fonction certaine le long du paramètre t et dont la dépendance de probabilité est égale à la fonction d'autocorrélation de la fonction certaine ; or, par définition, $\rho = 1$ pour une fonction certaine.

Exemples

$f(t)$: fonction certaine
 $x(t)$: fonction aléatoire

Exemple 1

$$f(t) = \sin(ut + \varphi)$$

$$\overline{X} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \varphi) d\theta = 0 \quad \text{où } \theta = ut$$

$$\overline{X^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\omega t + \varphi) d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{t, \Delta t} = \frac{\overline{f(t) f(t + \Delta t)}}{\sqrt{\overline{f^2(t)} \cdot \overline{f^2(t + \Delta t)}}} =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \varphi) \sin[\omega(t + \Delta t) + \varphi] d\theta = \cos \omega \cdot \Delta t$$

pour $t = \frac{\pi}{2} + 2kn$ k : entier

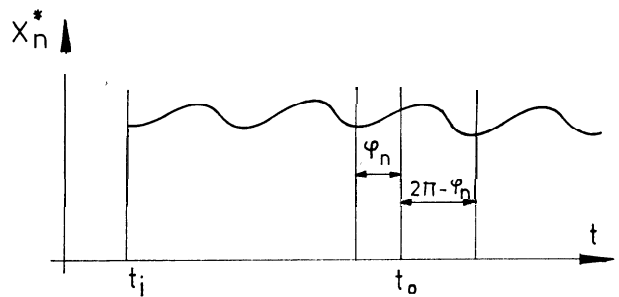


Fig. 21. — Composante d'ordre n .

on a :

$$\overline{f(t)} \equiv \overline{\sin(\omega t + \varphi)} = 0 \quad \overline{x(t)} = 0$$

$$\overline{f^2(t)} \equiv \overline{\sin^2(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{2} \quad \overline{x^2(t)} = \frac{1}{2}$$

$$\rho[f(t)] = 1 \quad \forall t, \Delta t \quad \rho[x(t)] = \cos \omega \cdot \Delta t \quad \forall t$$

Exemple 2

$$f(t) = e^{-t}$$

$$\overline{x} = 0 \quad \overline{x^2} = 0 \quad \rho = e^{-\Delta t} \quad \forall t$$

$$\overline{f(t)} = e^{-t} \quad \overline{f^2(t)} = e^{-2t} \quad \rho = 1 \quad \forall t, \Delta t$$

Exemple 3

$$f(t) = at + b$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{x} = \pm \infty \\ \overline{x^2} = \pm \infty \end{array} \right\} \text{ si } a \neq 0$$

$$\rho = 1$$

Dans le cas de la droite certaine, la fonction d'autocorrélation est identique à la fonction de corrélation.

§2. Fonction prévision

Soit $X^*(t)$ une mesure dans laquelle on a éliminé toutes les fonctions certaines. Souvent on soustraira la droite certaine obtenue par la méthode des moindres carrés et certaines fonctions périodiques de période $\Delta t_1 \ll \Delta t_2$. (Variations journalières saisonnières, etc.)

La fonction prévision $p(t)$ est une fonction certaine qui prolonge la mesure $X^*(t)$ dans le futur.

$$X^*(t_0) = p(t_0) \quad t_0 \text{ présent}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial X^*(t_0)}{\partial t} = \frac{\partial p(t_0)}{\partial t}$$

Remarque 1

La fonction $p(t)$ est bornée puisqu'il s'agit d'un phénomène physique, mais non forcément nulle à l'infini.

$$\text{Nous ferons donc la prévision sur la pente } p'(t) = \frac{\partial p(t)}{\partial t}.$$

De plus, nous imposerons $p'(\infty) = 0$.

On retrouvera la fonction $p(t)$ par intégration, connaissant la condition initiale :

$$p(t_0) = X^*(t_0)$$

Remarque 2

L'influence des fluctuations de $X^*(t)$ sur le présent est d'autant plus faible que l'on est plus loin dans le passé et que le phénomène est peu prévisible, car alors la dépendance de probabilité est faible.

Nous calculerons la fonction prévision en décomposant la dérivée de la mesure $\frac{\partial X^*(t)}{\partial t}$ multipliée par la fonction connaissance, en série de Fourier. On tient compte ainsi de l'influence plus ou moins forte du passé sur le présent.

$$C'_n = \frac{1}{t_i - t_0} \int_{t_0}^{t_i} \frac{\partial X^*}{\partial t} K(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

t_0 : présent

t_i : début de la mesure

n : entier positif (ou indice)

$\omega_0 = \frac{2\pi}{t_i - t_0}$ pulsation fondamentale.

C'_n est la valeur moyenne sur l'intervalle de mesure $t_0 - t_i$ de pulsation d'ordre n .

Du présent vers le futur, les coefficients de la série de Fourier deviennent

$$C_n'^* = || C'_n || e^{j(2\pi - \varphi_n)}$$

avec $C'_n = || C'_n || e^{j\varphi_n}$

Pour calculer la fonction prévision, il faut pondérer les coefficients $C_n'^*$ d'un terme $F(t)$ diminuant avec t

$$F(t) = \frac{(t_i - t_0) P(t)}{\int_{t_0}^{t_i} k(t) dt}$$

d'où la dérivée de la fonction prévision

$$p'(t) = F(t) \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n'^* e^{jn\omega_0 t}$$

On obtient $p(t)$ par intégration, sachant que

$$p'(t_0) = \frac{\partial X^*(t_0)}{\partial t}$$

et

$$p(t_0) = X^*(t_0)$$

Conclusion

La fonction prévision $p(t)$ permet de prolonger une mesure $X^*(t)$ dans le futur. La fonction prévisibilité $P(t)$ permet de dire avec quelle probabilité la prévision risque de se réaliser.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

1. WERNER HEISENBERG : *La nature dans la physique contemporaine.*
2. EVRY SCHATZMAN : *Astronomie.* Encyclopédie de la Pléiade.
3. FRANÇOIS BAATARD : *Structure générale d'une mécanique de la diffusion* (thèse). Multi-Office, Lausanne, 1963.
4. G. DEDEBANT et PH. WEHLÉ : *Mécanique aléatoire.* Portugaliae Physica, 1945.
5. A. J. FAVRE : *The Equations of compressible Turbulent gases.* Institut de Mécanique statistique de la turbulence, Marseille, 1965.
6. G. DEDEBANT : *Essai d'une axiomatique aléatoire.* Publicaciones de la Facultad de Ciencias fisicomatematicas, La Plata, 1948.
7. G. DEDEBANT : *Sobre la prevision estadística del tiempo.* Serie Meteorologica N° 7, Buenos-Aires, 1951.
8. J. STERN, J. DE BARBEYRAC, R. POGGI : *Méthodes pratiques d'étude des fonctions aléatoires.*

Adresse de l'auteur :

M. Pierre Ravussin, D^r ès sc. techn.
 Ing. physicien EPFL - SIA
 Résidence Grand-Vue
 1092 Belmont/Lausanne