

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

Cours postgrade

BASES SCIENTIFIQUES DE LA PROTECTION DE L'AIR

Cours officiel en langue française de :
OMS Organisation Mondiale de la Santé,
OMM Organisation Météorologique Mondiale,
PNUE Programme des Nations Unies pour l'Environnement

**COURS DE MECANIQUE ALEATOIRE DE
LA TURBULENCE ET DE LA DIFFUSION**

Pierre Emile Ravussin

Directeur a.i.
Chaire de la mécanique
de la turbulence
EPFL (Suisse)

Directeur du cours

Lausanne, octobre 1979

TABLE DES MATIERES

1. INTRODUCTION

- 1.1 Les concepts de la mécanique aléatoire
 - 1.1.1 Où va la fumée ?
 - 1.1.2 Ecoulement laminaire
 - 1.1.3 Fluide visqueux
 - 1.1.4 Fluide aléatoire des fluides
 - 1.1.5 Conclusion

2 MECANIQUE RATIONNELLE DES FLUIDES

- 2.1. Rappel de quelques principes fondamentaux
 - 2.1.1. Le principe de relativité de Galilée
 - 2.1.2. Loi de Newton
- 2.2. Fluides en écoulement laminaire
 - 2.2.1. Particules de fluides
 - 2.2.2. Fluide parfait
 - 2.2.2.1. Forces de gravitation
 - 2.2.2.2. Force de Coriolis
 - 2.2.3. Le fluide visqueux
 - 2.2.3.1. Viscosité
 - 2.2.3.2. Forme générale de l'équation de Navier-Stokes
 - 2.2.3.3. Développement simplifié de l'équation de Navier-Stokes
 - 2.2.3.4. Développement général, flux d'impulsion
- 2.3. Equations de continuité
- 2.4. Equation thermodynamique
 - 2.4.1. Mouvement isotherme
- 2.5. **Résumé des chapitres précédents**
 - 2.5.1. Mécanique
 - 2.5.1.1. Loi de Newton
 - 2.5.2. Mécanique des fluides
 - 2.5.2.1. Equation d'Euler
 - 2.5.2.2. Equation de Navier-Stokes
 - 2.5.2.3. Equation de continuité
 - 2.5.2.4. Equation thermodynamique

3 ECOULEMENTS TURBULENTS

3.1 Introduction

3.2 Lois de similitude

3.2.1 Nombre de Froude

3.2.2 Nombre de Strouhal

3.3 Apparition de la turbulence

3.4 Fonctions aléatoires

3.4.1 Règle d'application de l'opérateur moyenne

3.4.2 Hypothèse ergodique

3.4.2.1 Echelle temporelle

3.4.2.2 Durée du phénomène, intermittence

3.5 Les équations de Reynold

3.5.1 Tenseur de Reynold

3.5.2 Théorie semi empirique

3.6 Eléments de la théorie aléatoire gaussienne en un point

3.6.1 Corpuscule aléatoire

3.6.2 Distribution gaussienne

3.6.2.1 Cas à une dimension

3.6.2.2 Cas à 3 dimensions

3.6.3 Référentiel naturel

3.6.4 Ellipsoïde de diffusion

3.6.4.1 Recherche des axes principaux

4 DIFFUSION ET DISPERSION

4.1 Introduction

4.2 Diffusion moléculaire

4.2.1 Rappel de la théorie cinétique des gaz

4.2.1.1 Distribution des vitesses dans un gaz

4.2.1.2 Libre parcours moyen

4.2.1.3 Viscosité

4.2.2 Diffusion moléculaire

4.2.2.1 Loi de Fick

4.2.2.2 Vitesse de diffusion

4.2.2.3 Diffusion moléculaire dans un référentiel mobile

4.3 Diffusion turbulente

- 4.3.1 Structure du tenseur de diffusion turbulente
- 4.3.2 Eléments de la solution générale de la diffusion du corpuscule aléatoire.
- 4.3.3 Mesure des paramètres euleriens de la diffusion

Mesures micro-météorologiques à la centrale nucléaire de Leibstadt et calcul de l'ellipsoïde de diffusion.

Référence bibliographique succincte

COURS DE MECANIQUE ALEATOIRE DE LA TURBULENCE ET DE LA DIFFUSION

1. INTRODUCTION

1.1. Les concepts de la mécanique aléatoire.

1.1.1. Où va la fumée ?

Un panache sort d'une cheminée. Il nous semble tout d'abord bien organisé, puis il s'effiloche, enfin il finit par disparaître à notre vue. Mais où va la fumée, quelle est sa contribution à la pollution atmosphérique ?

Un phénomène apparemment si bien organisé devrait pouvoir se résoudre sans trop de peine par la mécanique des fluides.

Or il n'en est rien et la cause de cette difficulté qui s'appelle turbulence.

C'est le mouvement désorganisé des masses d'air qui nous empêche d'appliquer les lois déterministes. En effet, dès qu'un écoulement quelconque dépasse une certaine vitesse, appelée vitesse critique, l'aspect cohérent et bien défini du mouvement disparaît. Or, l'atmosphère au voisinage du sol (couche limite atmosphérique) est soumise, la plupart du temps, à ces mouvements désorganisés, dont la cause principale est le frottement des masses d'air sur les rugosités et les obstacles du sol.

Observons un objet flottant à la surface d'un lac (sans vent) ou dans un canal en plaine: il suit une trajectoire bien définie, selon des courbes doucement arrondies. On dit que l'on a à faire à un écoulement laminaire.

Essayons de définir quels sont les différents types d'écoulement que l'on rencontre dans la nature et quels sont les lois et concepts qui s'y rattachent.

1.1.2. L'écoulement laminaire

La trajectoire que décrit notre bouchon est une "bonne" fonction, monotone et bornée, que l'on peut intégrer ou dériver sans problèmes au sens ordinaire des termes.

Considérons maintenant un petit volume de fluide, suffisamment petit pour que les mouvements d'ensemble des atomes ou molécules qui le composent soient constants, mais suffisamment grand pour que les fluctuations du nombre de ces molécules soient négligeables; nous avons défini une particule de fluide, liée à la notion d'échelle spatiale .

On peut sans autre appliquer à cette particule de fluide les théorèmes généraux de la mécanique rationnelle, en particulier le principe de d'Alembert (physicien français 1717-1783), qui exprime l'équilibre des forces extérieures (pression) appliquées à la surface de la particule et des forces d'inertie appliquées (en moyenne) sur les molécules situées à l'intérieur du volume (en l'absence de forces extérieures).

C'est L. Euler (physicien bâlois, 1707-1783) qui en 1755 a établi cette relation :

$$\rho \delta_t \mathbf{V} = - \text{grad } p$$

- ρ masse volumique [Kg/m³]
- δ_t dérivée par rapport à t
- \mathbf{V} vecteur vitesse Eulerienne [m/s]
- p pression thermodynamique [pascal]
- t temps [s]

Dans les équations d' Euler, on considère les vitesses \mathbf{V} des particules des fluides qui arrivent successivement en des points fixes de l'espace. Mais il y a une autre façon de faire, équivalente : c'est de considérer les positions q successives de chacune des particules du fluide et les variations de ces positions au cours du temps par rapport à un point quelconque fixé. C'est le point de vue de Lagrange (mathématicien français, 1736)

Supposons qu'il existe une fonction décrivant tous les mouvements possibles de n particules qui composent le fluide.

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

Cette fonction doit obéir à la loi la plus générale des systèmes mécaniques qui est le principe de moindre action (ou principe de Hamilton). Le principe dit que l'action S de la fonction de Lagrange L à deux instants différent doit être minimum.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \text{ minimum}$$

La nature prend le chemin le plus court dans l'espace à $6n$ dimensions des q_i, \dot{q}_i .

Mais les équations d' Euler ou de Lagrange ne suffisent pas à lier complètement la grandeur p, v et p entre elles. Il faut encore établir l'équation de continuité qui exprime que la variation (en moyenne) du nombre de molécules à l'intérieur de la particule de fluide est égale au flux de particules à travers la surface :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

Ce n'est que dans ce cas et dans le cas plus général où le mouvement du fluide est adiabatique, qui correspond au fait que l'entropie de chaque particule de fluide reste constante au cours du mouvement, que le système est réversible : la solution du système d'équation permet de décrire le mouvement non seulement dans le futur mais aussi dans le passé. Dans les autres cas, les équations ne sont pas symétriques par rapport au présent.

1.1.3. Fluide visqueux

Revenons sur notre lac et mettons doucement en mouvement, au moyen d'une rame, un petit volume de fluide. On constate au bout d'un certain temps que ce mouvement disparaît.

L'énergie cinétique s'est transformée principalement en chaleur (augmentation de l'agitation moléculaire), mais aussi partiellement en rayonnement électromagnétique et en phonons (onde sonore). C'est le frottement interne dû au choc élastique des molécules qui est la cause de ce phénomène. Il est caractérisé par un coefficient de viscosité. Ce sont Navier (physicien français, 1785-1830) et Stokes (physicien anglais, 1819-1903) qui modifièrent les équations d' Euler en soustrayant au terme de pression ordinaire une pression dynamique de viscosité

$$\rho d_t \vec{v} = - \text{grad} (P - P_d)$$

Les façons d'interpréter la pression dynamique de viscosité sont d'ailleurs encore sujettes à discussion.

Le coefficient de viscosité ne dépend pas de la pression, mais de la température et on doit en toute rigueur en tenir compte dès que l'on sort du cas isotherme.

1.1.4 Fluide turbulent

Quittons notre lac tranquille et rendons nous au bord d'un torrent impétueux avec une bonne provision de bouchons et lâchons en un. Catastrophe : le bouchon zigzague dans tous les sens, disparaît sous l'eau pour reparaître à un endroit inattendu. Il serait bien difficile de décrire mathématiquement un tel parcours, de plus un deuxième bouchon lâché rigoureusement au même endroit, va parcourir un chemin différent du premier sans que le régime du torrent ait varié (régime stationnaire).

Comment dans ce cas conserver l'acquis de plus de deux siècles de recherches ?

On peut essayer de calculer les moyennes des trajectoires des particules de fluide passant initialement par le même point, (point de vue Lagrangien), mais cela est difficile car plus on s'éloigne du point initial, moins la notion de trajectoire devient imprécise : la prévisibilité de la trajectoire décroît avec le temps.

Du point de vue Eulérien, on peut, pour chaque élément de volume du fluide, observer les vitesses successives, et en effectuer la moyenne. En plus de la notion d'échelle spatiale, il apparaît une échelle temporelle : le temps pendant lequel les moyennes sont calculées doit être suffisamment grand pour que les fluctuations des moyennes successives soient négligeables.

Si le régime τ_0 de notre torrent varie suffisamment lentement, (régime pseudo stationnaire), la moyenne flottante en chaque point varie elle aussi lentement selon une fonction analytique : on peut à nouveau utiliser les équations de Navier Stokes. Mais il faut y introduire un terme supplémentaire qui tienne compte du phénomène irréversible de la turbulence (tenseur de Reynold).

La turbulence dans un écoulement stationnaire ou lentement variable, nous oblige à introduire un concept nouveau : les fonctions aléatoires du temps. Au contraire des fonctions ordinaires qui à chaque instant prennent une seule valeur, une fonction aléatoire représente à chaque instant un ensemble de valeurs.

L'être mathématique le plus général qui définit un vecteur aléatoire dans un espace à 3 dimensions est un tenseur d'ordre 3: il décrit la probabilité d'apparition de valeurs particulières des triplets des composantes (\mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 , \mathbf{V}_3) (note).

De fait, l'axiomatique aléatoire de Dedebeant et Wehrlé justifie complètement l'application de l'opérateur "moyenne" aux équations de la mécanique des fluides. De plus, son application aux équations de Navier Stokes permet de retrouver le tenseur de Reynold, sans faire d'hypothèse physique sur sa nature. Cette méthode est utilisée plus ou moins empiriquement par la plupart des chercheurs. Un travail systématique est effectué dans cette direction par A. Favre de l'Université de Marseille et son équipe.

Mais deux difficultés restent encore à surmonter pour résoudre notre problème de dispersion de panache : c'est d'une part la diffusion, qui n'apparaît pas dans les équations de Navier Stokes et d'autre part l'extrême variabilité des phénomènes atmosphériques : l'échelle temporelle nécessaire pour obtenir des moyennes flottantes correctes est de l'ordre de plusieurs mois. Or, dans beaucoup d'études sur l'environnement atmosphérique, la durée des phénomènes qui nous intéressent est de l'ordre de l'heure, tout au plus de la semaine.

Si l'on voulait résoudre notre problème du point de vue de la dynamique classique et de l'univers certain, on tomberait sur un système de 10^{27} équations à 10^{27} degrés de liberté ! Mais alors dans ce cas, le problème de la viscosité, cause de la turbulence devrait être traité individuellement pour chaque molécule sous la forme des chocs élastiques et inélastiques.

Or ceux-ci sont étroitement liés aux phénomènes quantiques dont les molécules sont le siège. La physique quantique fait appel aux concepts d'un univers essentiellement aléatoire : les équations de Schrödinger décrivent la propagation du champ de probabilité de présence de la particule élémentaire; l'électron passe à la fois par les deux trous de l'expérience de Young pour former une figure d'interférence. Dans ce concept, la fonction aléatoire continue d'exister, aussi petite que soit l'échelle temporelle. Les moyennes statistiques temporelles "le long du processus" sont remplacées par des moyennes statistiques aléatoires "à travers le processus".

Il est possible de rattacher le concept de l'univers aléatoire aux équation de Navier Stokes "aléatorisées" car dans le cas stationnaire, la théorie ergodique montre l'équivalence des moyennes temporelles et des moyennes statistiques aléatoires. Lorsqu'on jette un grand nombre de fois un dé à jouer pipé, on trouve qu'il tombe un même nombre de fois différente sur chacune des faces que si l'on jetait à la fois un grand nombre de dés pipés de façon identiques.

note : \mathbf{V} le caractère gras représente un vecteur

\mathbf{V} le fond gris indique qu'il s'agit d'une grandeur aléatoire

1.1.5. Mécanique aléatoire des fluides

La mécanique aléatoire va donc faire appel aux concepts de l'univers aléatoire, avec comme cas limite, les phénomènes stationnaires ou lentement variables où les équations de la mécanique statistique des fluides s'appliquent.

Le concept a pour conséquence les deux lemmes fondamentaux de la mécanique aléatoire:

- 1) la particule de fluide est remplacée par le corpuscule aléatoire R qui a pour coordonnées de position q et de vitesse des fonctions aléatoires du temps. Le corpuscule aléatoire est donc une association d'une

densité de probabilité de présence $\rho (q/t)$

et

d'un champ aléatoire des vitesses $f (q, \dot{q}/t)$

$$R (q, \dot{q}/t) = \rho (q/t) \otimes f (q, \dot{q}/t)$$

- 2) Le principe de moindre action est remplacé par un principe de moindre relâchement du champ de densité de probabilité.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L (q, \dot{q}, t) dt = \text{minimum}$$

Ces deux lemmes ont pour conséquence de faire apparaître dans les équations aléatoires de Lagrange des termes $\overline{q_i q_j}$ qui expriment la diffusion du corpuscule aléatoire.

1.1.6. Conclusion

Il existe autant de mécaniques aléatoires qu'il y a de champs de dépendance de probabilité,

Pour être complète, la mécanique aléatoire des fluides doit être associée à la thermodynamique des processus irréversibles.

Les travaux actuels de la Chaire de la mécanique de la turbulence consistent en l'étude du champ de dépendance de probabilité de l'atmosphère par les mesures. D'autres travaux, plus théoriques, ont permis de rattacher la mécanique aléatoire de la diffusion à la théorie de la diffusion de Taylor. Ils ont été présentés lors d'un séminaire sur la turbulence qui s'est tenu le 17 novembre 1978 à l'EPFL.

2. MECANIQUE RATIONELLE DES FLUIDES

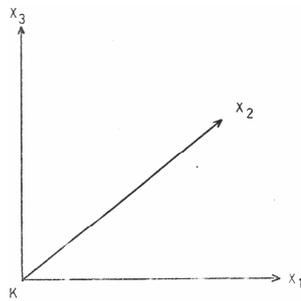
L'étude du mouvement des liquides et des gaz constitue la mécanique des fluides.

Le système d'équations différentielles décrivant le mouvement d'une particule de fluide est basé sur les théorèmes généraux de la mécanique rationnelle.

2.1. Rappel des quelques principes fondamentaux

2.1.1. Le principe de relativité de Galilée.

Pour étudier les phénomènes mécaniques et en particulier ceux de mécanique des fluides, il faut choisir un système de référence ou repère.



Coordonnées x_1 , x_2 , x_3 du système galiléen (repère conventionnel)

Il faut bien sûr choisir le repère de telle sorte que les lois mécaniques soient le plus simple possible. Par rapport à un système de référence quelconque, l'espace est non homogène et anisotrope. Il en est de même avec le paramètre temps qui ne sera pas uniforme, c'est-à-dire que dans un système de référence quelconque, l'origine du temps influence la description du phénomène.

Ainsi, par exemple, si une personne observe un manège, elle pourra déterminer facilement que le manège est en rotation uniforme ou pas, tandis qu'une personne située sur le manège lui-même aura de la peine à dire si le premier observateur est immobile ou non, ou encore aura les plus grandes peines à décrire le mouvement du premier observateur (même immobile) par rapport à elle.



Référentiel galiléen et référentiel quelconque

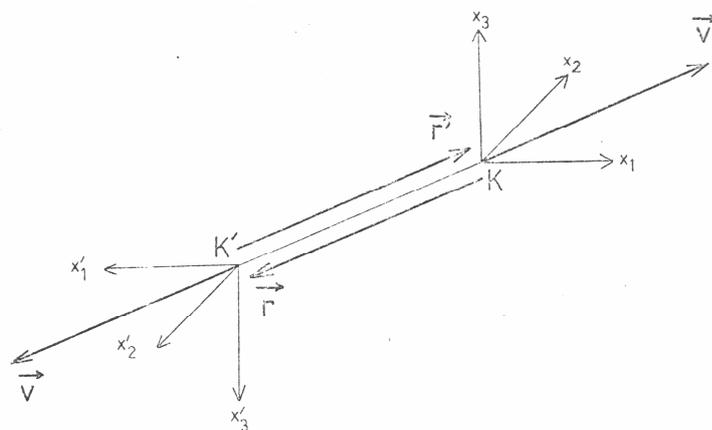
En fait, il existe une infinité de systèmes de références dits galiléens (Galilée, physicien italien, 1504-1642) qui sont animés les uns par rapport aux autres d'un mouvement rectiligne et uniforme, et dans lesquels un mouvement libre s'effectue à vitesse constante en amplitude et en direction. Dans ces systèmes, les propriétés de l'espace et du temps sont les mêmes, ainsi que toutes les lois de la mécanique.

C'est le principe de relativité de Galilée.

Les coordonnées vectorielles \mathbf{r} et \mathbf{r}' d'un même point dans deux systèmes de références galiléens K et K' sont liés par la relation

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V} t$$

où \mathbf{V} est le vecteur vitesse (constante) de déplacement d'un repère par rapport à l'autre.



Repères galiléens

Comme les systèmes K et K' sont équivalents

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V}' t$$

Cela implique que la métrique est la même dans les 2 systèmes de références et que le temps s'écoule de la même façon dans les 2 systèmes

$$\begin{aligned} x &= x' \quad [\text{m}] \\ t &= t' \quad [\text{s}] \end{aligned}$$

On sait maintenant que, selon le principe de la relativité restreinte d'Einstein (Einstein, physicien allemand, 1879-1955) cela n'est vrai que pour autant que les vitesses mises en oeuvre soient beaucoup plus petites que la vitesse de la lumière.

$$V \ll c \sim 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

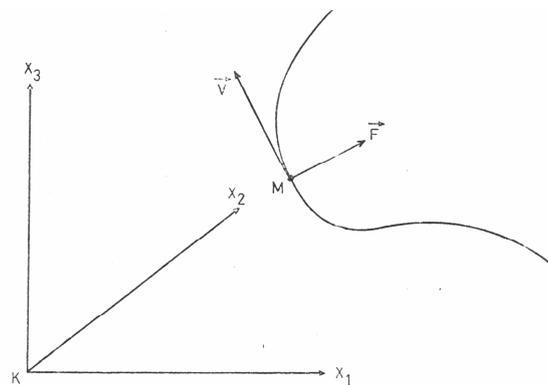
En toute rigueur, le référentiel K de la figure ci dessus n'est pas un référentiel galiléen, car il est entraîné par la rotation de la terre sur elle-même et par son mouvement autour du soleil.

De même, et selon le principe de la relativité généralisée cette fois, un repère galiléen n'est valable que loin de toute masse.

Au point de vue pratique, ces effets sont en général négligeables à l'échelle locale, mais il faut tenir compte de l'effet de la rotation de la terre sur elle-même lors de l'étude des écoulements atmosphériques de l'échelle régionale, à cause des forces de Coriolis qu'elle provoque (G. Coriolis, mathématicien français, 1792-1843).

2.1.2. Loi de Newton

Soit un point matériel de masse M . Supposons que des forces F_i s'exercent sur lui. Ces forces peuvent être variables avec le temps ou non. La résultante $F = M a$ n'est en général pas nulle et le point matériel décrit une trajectoire C dans un référentiel galiléen K .



Mouvement du point matériel

Les forces sont la cause de la modification de la trajectoire du point matériel

vitesse $V \neq \text{cte}$

accélération $a \neq 0$

Les relations entre les grandeurs spatio-temporelles qui déterminent la trajectoire et la force F est donnée par

$$F = M a$$

F vecteur de la résultante des forces

M masse du point matériel

a vecteur accélération

C'est la loi de Newton. Isaac Newton (physicien anglais, 1642-1727) a, le premier, admis que cette relation est absolument générale, quelque soit la nature des forces exercées sur la masse. De fait Galilée l'avait déjà reconnue dans le cas où a est constant (pesanteur) et Huygens (Christiaan Huygens, physicien néerlandais, 1621-1695) dans le cas du mouvement circulaire uniforme (a de module constant et de direction variable).

La loi de Newton implique l'équivalence des forces de pesanteurs (gravitation) des forces d'inerties d'accélération et centrifuges.

2.2. Fluides en écoulement laminaire

2.2.1. Particule de fluide

Les phénomènes envisagés en mécanique des fluides ont toujours un caractère macroscopique, car le fluide y est considéré comme un milieu continu; mais il existe au sein des fluides des relations sous-jacentes qui sont étudiées par la théorie cinétique des gaz ou la physique quantique.

De fait, on remplace le point matériel de la mécanique classique par un être physique plus complexe qui est la particule de fluide. Ce concept implique la définition d'un autre concept qui l'échelle spatiale du phénomène. En effet, pour que l'on puisse considérer le milieu comme continu, il faut que les fluctuations du nombre des atomes dans le volume définissant la particule de fluide soient négligeable.

Les fluctuations sont dues au mouvement statistique des molécules ou atomes qui composent le fluide. Bien que les vitesses moyennes des atomes du fluide soient grandes (~ 450 m/s dans le cas de l'atmosphère), leur très grande densité numérique ($2,7 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$) provoque un très grand nombre de collision et le libre parcours moyen est très petit. ($3,6 \cdot 10^{-10}$ m pour l'atmosphère, ces collisions donnent d'ailleurs au fluide une propriété particulière qui s'appelle la viscosité).

Il faut donc que le nombre d'atomes dans la particule de fluide soit très grand. De l'autre cote de l'échelle, il faut que les dimensions de la particule de fluide soient beaucoup plus petites que les dimensions des obstacles présents dans l'écoulement.

2.2.2. Fluide parfait.

Il existe une catégorie de fluide dans lesquels les effets du frottement interne sont négligeables. Il s'agit soit de gaz très raréfiés, pour lequel le libre parcours moyen est grand vis-à-vis des obstacles, ou d'un fluide particulier : l'hélium liquide sous sa forme II, dans lequel les échanges énergétiques quantiques sont tels que la viscosité disparaît. Ces fluides sans viscosité s'appellent des fluides parfaits.

Dans le fluide parfait, on considère une particule de fluide composée d'un grand nombre de points matériels de la mécanique classique.

On a donc à faire à une théorie déterministe composée d'un jeu d'équations différentielles rationnelles. De ce fait, la connaissance à un instant quelconque des conditions initiales, données par la position et la vitesse de toutes ces particules de fluides à un instant donné permet de calculer à n'importe quel instant dans le passé ou dans le futur quel était ou quel sera l'état du fluide. Nous verrons que dans le cas des fluides turbulents la prévisibilité du phénomène est limitée.

La description mathématique de l'état du fluide se fait au moyen de fonctions déterminant la vitesse du fluide dans l'espace-temps $V(x_1, x_2, x_3, t)$, et deux quelconques de ses grandeurs thermodynamique, par exemple la pression $p(x_1, x_2, x_3, t)$ et la densité $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$. Il faut 5 grandeurs : les 3 composantes de la vitesse $V(V_1, V_2, V_3, t)$, p et ρ pour déterminer complètement le fluide en mouvement dans l'espace-temps x_1, x_2, x_3, t .

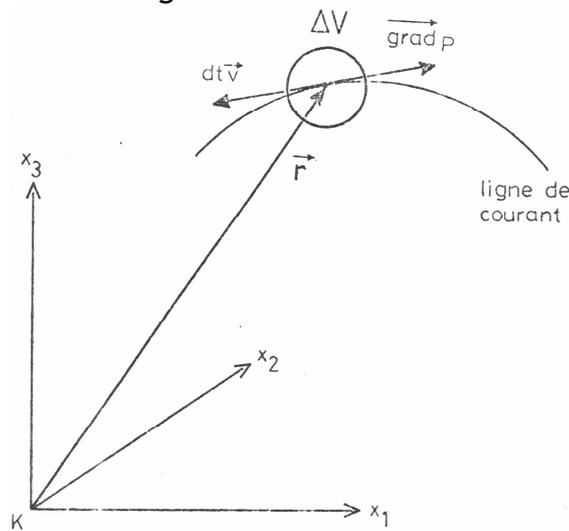
Il faut donc 5 équations pour déterminer les relations entre les 5 grandeurs caractéristiques du fluide.

C'est le savant bâlois (Suisse) Leonard Euler (1707-1783) qui le premier a établi les équations du mouvement du fluide parfait.

Les 3 premières équations sont les 3 composantes d'une équation vectorielle. Ce sont les équations d'Euler proprement dit.

Elles sont basées sur le principe de d'Alembert (savant français, 1717-1783) qui exprime l'équilibre des forces extérieures et des forces d'inertie appliquées sur la particule de fluide.

Soit S , la trajectoire au sein d'un fluide parfait d'une particule de fluide définie par son volume ΔV et un référentiel galiléen K .



Particule de fluide

Supposons que les forces extérieures appliquées sur le volume ΔV sont uniquement les forces de pression exercées sur la surface S de la particule de fluide.

La force totale exercée est donnée par l'intégrale

$$\vec{n} = - \oint p d\vec{S}$$

que l'on peut transformer en intégrale de volume (formule du gradient)

$$\vec{v} = - \iiint \text{grad } p dV.$$

Dans le référentiel mobile (localement galiléen) de la particule de fluide K' , la masse

M , contenue dans le volume ΔV subit une force d'inertie $\vec{F} = M \frac{\partial v'}{\partial t}$

avec $M = \iiint \rho dV$

d'où $\frac{\partial v'}{\partial t} \iiint \rho dV = - \iiint \text{grad } p dV$

soit par unité de volume en supposant l'accélération constante dans la particule de fluide

$$\rho \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} p$$

Mais selon la conception d'Euler, l'équation doit être exprimée par rapport au référentiel fixe K.

On notera $\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\frac{d\vec{v}}{dt}$ différentiel totale de la vitesse par rapport au référentiel fixe K

d'où $\frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p$

or dans un changement de repère galiléen

$$d\vec{v}' = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + dx_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_3}$$

la variation de v' pendant dt est la somme de la variation de la vitesse au point donné de l'espace, pendant l'intervalle de temps dt et de la différence des vitesses (au même instant) en deux points séparés de la distance dr parcourue par la particule de fluide pendant le temps dt .

En divisant par dt , il vient,

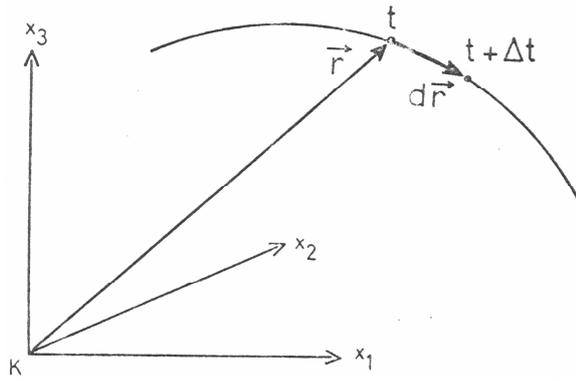
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_3}$$

soit en utilisant l'opérateur laplacien ∇

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v}$$

et l'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p$$

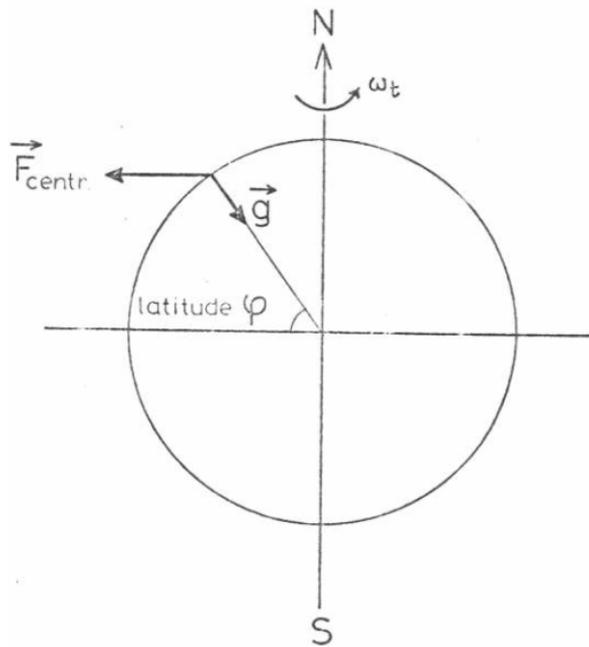


Dérivée totale

Mais d'autres forces s'exercent en général sur le fluide

Dans le cas de l'atmosphère, ce sont les forces de gravitation F_{grav} , la force centrifuge F_{centr} et la force de Coriolis F_{cor}

2.2.2.1. Forces de gravitation



Force d attraction terrestre

En un point quelconque de la terre, la force d'attraction, composée de la force de gravitation et de la force centrifuge est constante. En général on pose

$$\vec{g} = \vec{F}_{\text{grav}} + \vec{F}_{\text{centr}} = \text{constante d'attraction locale}$$

Celle-ci varie avec la latitude φ du lieu où on se trouve

$$g_{\varphi} = g_0 + R\omega^2 \cos^2\varphi$$

en tenant compte de l'aplatissement de la terre

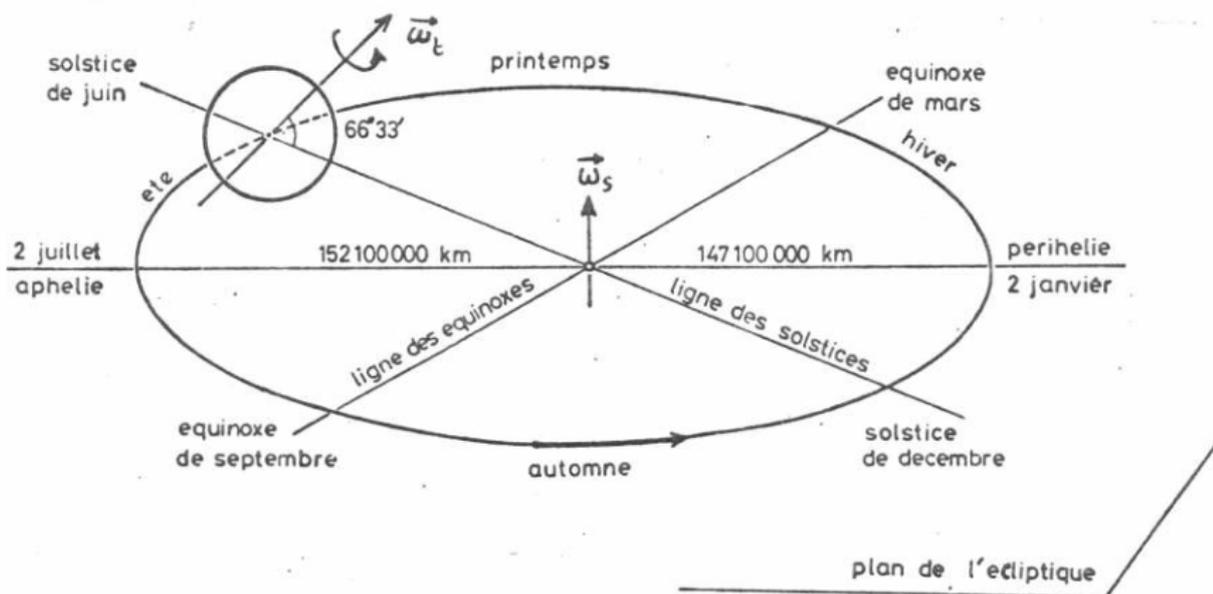
$$g_{\varphi} = 9,832 - 5,2 \cdot 10^{-2} \cos^2\varphi$$

l'équation d'Euler s'écrit alors, sachant que la force d'attraction s'exerce sur chaque élément de la particule de fluide

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p + \vec{g}$$

2.2.2.2. Force de Coriolis

Changeons encore une fois de repère et plaçons nous dans un repère K'' fixe par rapport à la rotation de la terre.



Mouvement de la terre autour du soleil

En négligeant la rotation de la terre autour du soleil (1) la force de Coriolis s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2M(\vec{\omega}_t \times \vec{v})$$

$\vec{\omega}_t$ vecteur rotation de la terre

\vec{v} vitesse dans le référentiel lié à la terre en rotation

L'équation d'Euler s'écrit alors

$$\frac{\partial \vec{v}''}{\partial t} + (\vec{v}'' \nabla) \vec{v}'' = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{g}'' - 2(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

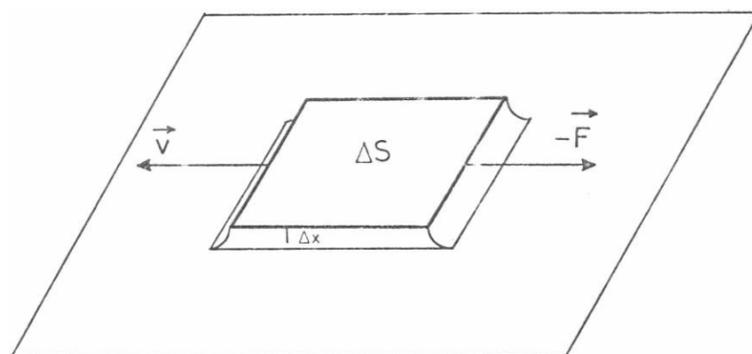
\vec{g}'' n'est plus un vecteur fixe en direction

2.2.3. Le fluide visqueux

Lorsqu'on met en mouvement une masse de fluide ordinaire (air, eau), on s'aperçoit que le mouvement s'arrête au bout d'un certain temps. Le frottement interne, appelé viscosité, a transformé l'énergie cinétique du fluide en chaleur.

2.2.3.1. Viscosité

Le coefficient de viscosité se définit comme le coefficient de proportionnalité entre la force F nécessaire pour déplacer à une vitesse v un élément de surface ΔS situé à une distance ΔX d'un plan fixe.



Forces de viscosité

- (1) on peut tenir compte de la rotation de la terre autour du soleil en remplaçant Ω par $\Omega_t + \Omega_s$ dans l'équation de la force de Coriolis.

Force de viscosité

$$\vec{F} = \mu \frac{\Delta S}{\Delta x} \vec{v}$$

μ coefficient de viscosité [N m⁻¹ s⁻¹]

2.2.3.2. Forme générale de l'équation de Navier-Stokes

Une partie de l'énergie cinétique ordonnée des molécules du fluide se transforme à cause de la viscosité en énergie thermique (chaleur). Cette part de l'énergie cinétique qui se perd apparaît dans l'équation d'Euler sous la forme d'une pression P_d .

Ce sont Navier (physicien français, 1785-136) et Stokes (physicien anglais, 1819-1903) qui introduisirent dans l'équation d'Euler un terme correspondant à cette transformation sous forme d'une pression dynamique de viscosité que l'on soustrait à la pression statique p

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}(p - P_d)$$

équation de Navier-Stokes

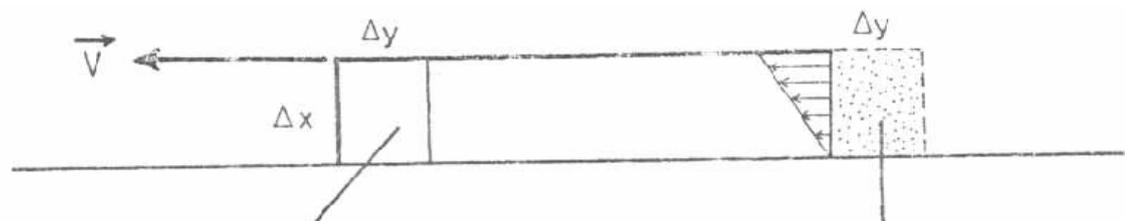
Cette formulation a été justifiée ultérieurement par la théorie cinétique du gaz qui montre que le coefficient de viscosité est indépendant de la pression.

Les façons de développer l'équation de Navier-Stokes sont diverses.

2.2.3.3. Développement simplifié de l'équation de Navier-Stokes

Nous allons présenter ici tout d'abord un développement simplificateur qui par un raisonnement dimensionnel, lie la viscosité à la pression dynamique.

En effet, chaque fois qu'on se déplace de Δy (fig. suivante) à la vitesse \vec{v} , on fournit un travail $F \cdot \Delta x$ qui correspond à une pression dans le volume $\Delta y \Delta x$.



Compression de cet élément de volume ; mise en équilibre du champ des vitesses

Cet élément a acquis de l'énergie cinétique (cohérente) qui se transforme en chaleur

Pression dynamique de viscosité

Pour une particule de fluide de volume V

$$F = \frac{\mu}{\Delta x} \iint \vec{v} dv = \frac{\mu}{\Delta x} \iiint \text{div} \cdot \vec{v} dV$$

$$p_d = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\mu}{\Delta V} \iiint \text{div} \cdot \vec{v} dV.$$

en passant à la limite

$$p_d = \mu \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \iiint \text{div} \cdot \vec{v} dV = \mu \text{div} \cdot \vec{v}$$

du fait que μ est une constante, on peut aussi l'introduire dans l'intégrale

$$p_d = \mu \text{div} \cdot \vec{v}.$$

ou
$$p_d = \text{div} (\mu \vec{v})$$

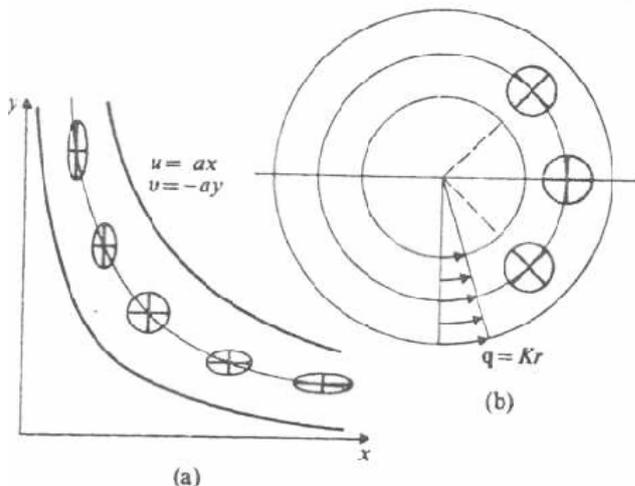
en développant

$$\vec{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{v} + \mu \text{rot rot } \vec{v}$$

$$\text{grad} (p + p_d) = \text{grad} (p + \mu \text{div} \cdot \vec{v}) =$$

et l'équation de Navier-Stokes devient

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} (\nabla \vec{v}) \right] = \vec{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{v} + \mu \text{rot rot } \vec{v}$$



Mouvement plan irrotationnel et rotationnel

On retrouve le cas classique des fluides incompressibles en posant

$$\overrightarrow{\text{rot}} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = 0$$

2.2.3.4. Développement général, flux d'impulsion

Nous allons maintenant reprendre un développement plus rigoureux en modifiant tout d'abord l'équation d'Euler de telle sorte qu'en utilisant l'équation de continuité on fasse apparaître un terme de flux d'impulsion $\rho \vec{v}$ par unité de volume du fluide dont la variation vaut :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Passons en notation tensorielle (voir annexe 1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i \quad i = 1, 2, 3$$

L'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0 \quad \text{s'écrit}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k}$$

et l'équation d'Euler

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} (\Delta \vec{v}) \right] = - \overrightarrow{\text{grad}} p \quad \text{s'écrit aussi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k}$$

$$\text{or} \quad -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} \equiv - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k)$$

en posant

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} \equiv \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k}$$

Symbole de Kronecker

$$\delta_{ik} = 0 \quad \text{si } i \neq k$$

$$\delta_{ik} = 1 \quad \text{si } i = k$$

on trouve, (sommation sur k)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = - \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k}$$

avec

$$\pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

Π est le tenseur de densité du flux d'impulsion

et l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = - \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k}$$

est l'équation de continuité du flux d'impulsion.

Développons pour l'exemple :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_1 = -\frac{\partial \pi_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \pi_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \pi_{13}}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_2 = -\frac{\partial \pi_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial \pi_{22}}{\partial x_2} - \frac{\partial \pi_{23}}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_3 = -\frac{\partial \pi_{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial \pi_{32}}{\partial x_2} - \frac{\partial \pi_{33}}{\partial x_3}$$

que nous écrivons symboliquement

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v} = -\frac{\partial \pi}{\partial \vec{x}}$$

La présence de viscosité dans le fluide (frottement interne) s'exprime par la présence du processus irréversible de transport d'impulsion des régions de vitesses élevées aux régions de vitesses plus faibles.

Il suffit donc de soustraire aux termes du tenseur de flux d'impulsion un terme exprimant les contraintes que subit le fluide du fait de la viscosité

$$\pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik}$$

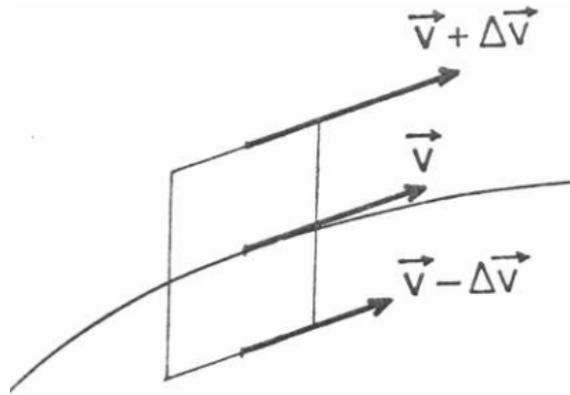
où σ'_{ik} tenseur visqueux des contraintes

on définit aussi :

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

On peut établir la structure générale de σ'_{ik} à partir des considérations suivantes :

1. les processus de frottement interne dans un fluide ne prennent naissance que si différentes régions du fluide se meuvent avec des vitesses différentes.



C'est pourquoi σ'_{ik} doit dépendre des $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$

2. Si les gradients des vitesses ne sont pas trop forts (écoulement laminaire !), on admettra une relation linéaire.

Les σ'_{ik} doivent s'annuler pour $\mathbf{v} = \text{Cte}$ dans l'espace, donc

les σ'_{ik} doivent s'annuler pour $\mathbf{v} = \text{cte}$ $\quad a = 0$

3. De même dans une rotation uniforme $\vec{\omega}$ où $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, les σ'_{ik} doivent

aussi s'annuler, ce qui est le cas de termes en

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

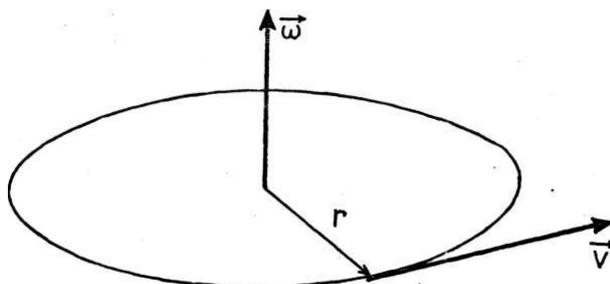


Fig. 14 Rotation différentielle

La forme la plus générale d'un tenseur de rang 2 répondant à ces conditions est

$$\sigma'_{ik} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}$$

a et b indépendant de v

que l'on peut écrire sous la forme

$$\sigma'_{ik} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

On peut revenir maintenant à l'équation de Navier-Stokes, en rajoutant au 2ème membre de l'équation d'Euler, le terme

$$\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \frac{\partial \sigma'}{\partial \vec{x}}$$

Dans le cas général μ et ξ dépendent de p et de T et ne peuvent être sortis de sous le signe dérivation, toutefois dans le cas de l'atmosphère, on peut d'une part relier μ et ξ par la relation de Stokes

$$3\xi + 2\mu = 0$$

et d'autre part μ est indépendant de p et ne dépend que très peu de T.

Alors :

$$\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \xi \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

d'où, sachant que $\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \text{div } \vec{v}$ et que $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \equiv \nabla^2 v_i$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\xi + \frac{2}{3} \mu \right) \overrightarrow{\text{grad}} \cdot \text{div } \vec{v}$$

avec $\xi = -\frac{2}{3} \mu$ pour l'atmosphère.

Pour un fluide incompressible $\text{div } \vec{v} = 0$ et le terme en $\text{grad div } \vec{v}$ disparaît : on retrouve la théorie simplifiée irrotationnelle.

Remarquons encore que v_{ik} contient des termes en δ_{ik} , c'est-à-dire en termes de la même forme que $\delta_{ik} p$. Aussi, il faut redéfinir la signification du terme pression.

En effet, P est défini dans un système en équilibre thermodynamique.

Cependant, pour de petits gradients de température et de vitesse, on peut conserver la définition initiale.

En conclusion, les équations d'Euler ou de Navier-Stokes représentent les 3 premières équations du système nécessaire pour résoudre les écoulements laminaires de fluides. Nous verrons par la suite que la viscosité impose des limites aux types d'écoulements solubles par ce genre d'équations.

Voyons maintenant les autres équations nécessaires pour former notre système.

2.3. Equations de continuité

Les équations de continuité sont basées sur un des principes fondamentaux de la physique et de la mécanique qui est la conservation de la masse, ou de l'énergie ou de la quantité de mouvement.

Nous faisons ici ce développement pour la conservation de la masse.

Considérons le volume ΔV occupé par la particule de fluide.

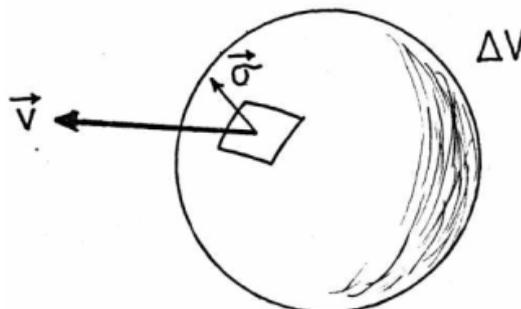


Fig. 15 Flux de masse

La masse contenue dans ce volume est donnée par l'intégrale

La quantité de particule qui sort par la surface de ce volume est donnée par :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = - \oint \rho \vec{v} d\vec{s}$$

d'où en égalant les 2 expressions

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta V} \rho dV = - \oint \rho \vec{v} d\vec{S}$$

En transformant l'intégrale de surface en intégrale de volume par la formule d'Ostrogradsky, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta V} \rho dV = - \iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \rho \vec{v} dV$$

$$\iiint_{\Delta V} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) dV = 0$$

En passant à la limite : $dV \rightarrow 0$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

2.4 Equation thermodynamique

Le frottement interne est la cause de l'irréversibilité thermodynamique du mouvement du fluide. Ce chapitre particulier de la thermodynamique n'est pas traité ici. Dans un fluide parfait, ou un fluide visqueux pour lequel on peut considérer que le phénomène est thermodynamiquement réversible, on peut considérer par exemple 2 cas.

2.4.1. Mouvement isotherme.

Si les mouvements sont suffisamment lents pour que la température puisse être considérée comme constante dans tout le fluide, on peut considérer simplement la proportionnalité entre la densité et la pression pour une température donnée

$$\frac{p}{\rho} = \text{constante}$$

Exemple

Atmosphère sèche

$T = 0^\circ \text{C}$

$\rho = 1,29 \cdot 10^{-9} \quad \text{Kg /m}^{-3}$

$p = 1,015 \cdot 10^{-4} \quad \text{N/m}^{-2}$

Dans un cas plus général, même s'il n'y a pas échange de chaleur entre les différentes particules de fluide. On peut tenir compte de ses variations de température : le mouvement du fluide est adiabatique : dans ce cas l'entropie de chaque région du fluide est conservée :

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

La dérivée totale de l'entropie signifie, tout comme la dérivée totale de la vitesse, que c'est l'entropie de la particule de fluide entraînée qui reste constante.

Par rapport au référentiel fixe, $\frac{ds}{dt}$ s'écrit :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \text{grad } s = 0$$

C'est l'équation générale exprimant l'adiabaticité d'un fluide parfait.

2.5 Résumé des chapitres précédents.

2.5.1. Mécanique.

2.5.1.1. Principe de « relativité » de Galilée, référentiel d'inertie.

Il existe une infinité de systèmes de références galiléens animés les uns par rapport aux autres d'un mouvement rectiligne uniforme. Dans ces systèmes, les propriétés de l'espace et du temps sont les mêmes, ainsi que toutes les lois de la mécanique.

En particulier, dans de telles références, tout mouvement libre s'effectue à vitesse constante en grandeur et en direction.

2.5.1.1. Loi de Newton

$$\vec{F} = M \vec{a}$$

\vec{F} : force extérieur [N]

M = masse [Kg]

a = accélération [$m \text{ s}^{-2}$]

La loi de Newton exprime l'équivalence entre la force appliquée \vec{F} et les effets de l'accélération sur la masse.

2.5.2. Mécanique de fluides.

5 inconnues:

p = pression [N m²]

ρ densité [Kg m⁻³]

$v_1 v_2 v_3$: 3 composantes de la vitesse [m/s]

Solution par un système de 5 équations :

3 premières équations : équations d'Euler = équations de mouvement (fluide parfait) ou équations de Navier-Stokes (fluide visqueux)

4ème équation : équation de continuité

5ème équation : équation thermodynamique

2.5.2.1. Equation d'Euler

Référentiel eulérien \equiv référentiel galiléen

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}(\nabla \vec{v}) \quad \text{dérivée totale de la vitesse}$$

Développement
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_1 + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_2 + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_3 + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}$$

2.5.2.2. Equation de Navier-Stokes

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} (p - p_d)$$

p_d pression dynamique de viscosité [N m^{-2}]

Définition de la viscosité

$$F = \mu \frac{S}{e} v$$

S = surface [m^2]

e = épaisseur [m]

μ coefficient de viscosité dynamique [$\text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$]

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ = coefficient de viscosité cinématique

Forme de l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{v} + \left(\xi + \frac{\mu}{3} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{v}$$

$\xi = 2^{\text{ème}}$ coefficient de viscosité

Relation de Stokes $3 \xi + 2 \mu = 0$ (gaz monoatomique)

(valable aussi pour l'atmosphère)

$$\underbrace{\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right]}_{\text{fluide parfait}} = \underbrace{- \overrightarrow{\text{grad}} p}_{\text{fluide visqueux}} + \underbrace{\mu \Delta \vec{v}}_{\text{fluide visqueux}} - \underbrace{\frac{1}{3} \mu \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{v}}_{\text{fluide visqueux compressible}}$$

2.5.2.3. Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0$$

2.5.2.4. Equation thermodynamique

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \overrightarrow{\text{grad}} s = 0$$

s entropie

3. ECOULEMENTS TURBULENTS

3.1. Introduction

Nous avons décrit jusqu'à présent une catégorie particulière d'écoulements : les écoulements laminaires. Or, dans la couche limite atmosphérique qui nous intéresse, les écoulements sont la plupart turbulents (sauf dans des conditions de stabilité atmosphérique très élevée), comme le sont aussi les écoulements dans les cumulus et les cumulonimbus. En fait, un écoulement laminaire est l'exception et l'écoulement turbulent la règle.

Tout le monde a une notion intuitive ou expérimentale de la turbulence, cependant il est extrêmement difficile d'en donner une définition précise.

Il n'existe actuellement pas de théorie générale de la turbulence, mais une série de solutions approchées qui s'appliquent à certains cas particuliers. La description des cas particuliers de turbulence de la couche limite atmosphérique sort du cadre de ce cours. Par contre, nous en donnerons ici les concepts généraux de la mécanique de la turbulence et de la mécanique aléatoire, ainsi que leurs bases mathématiques et physiques

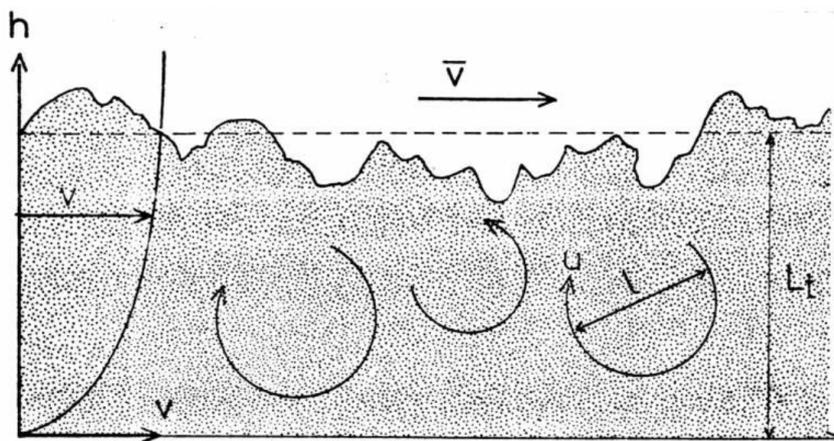


Fig. 15 Ecoulement turbulent dans la couche atmosphérique.

L_t = épaisseur de la couche limite

l = dimension des grands tourbillons

u = vitesse moyenne au-dessus de la couche limite

3.2. Lois de similitude

En étudiant les écoulements visqueux, on peut obtenir un certain nombre de résultats fondamentaux en raisonnant sur les dimensions des grandeurs physiques qui définissent l'écoulement.

Considérons par exemple l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'une sphère.

Les paramètres caractérisant le fluide incompressible qui entrent dans les équations de Navier-Stokes sont, à un facteur d'échelle près, uniquement la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$, alors que les fonctions inconnues qui devront être déterminées sont :

- le champ de vitesse \vec{v} et le champ de pression p (à un facteur d'échelle près p/ρ).

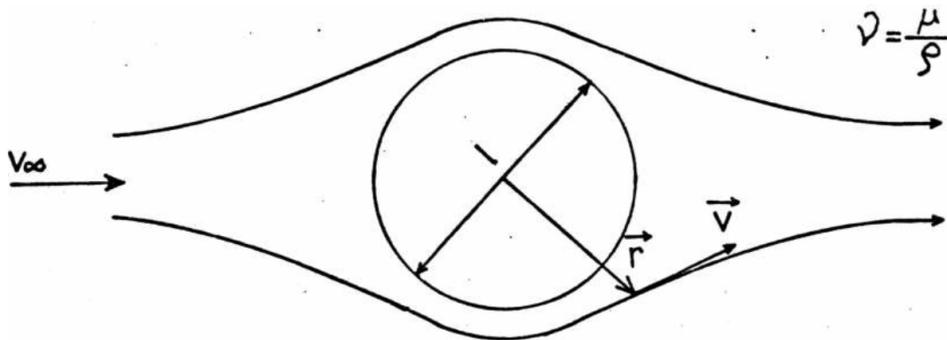


Fig. 16 Ecoulement autour d'une sphère

La dimension l de la sphère étant fixée, chaque écoulement peut être donc caractérisé par les trois paramètres

$$\begin{aligned} \nu & \quad [m^2 \ s^{-1}] \\ l & \quad [m] \\ v_{\infty} & \quad [m \ s^{-1}] \end{aligned}$$

car l'équation de Navier-Stokes détermine la relation $v = f(p)$.

La seule combinaison de ces 3 paramètres qui soit sans dimension est

$$R = \frac{v_{\infty} l}{\nu}$$

C'est le nombre de Reynolds.

En introduisant dans les équations de l'hydrodynamique des nombres sans dimension $\frac{r}{\ell}$, $\frac{v}{u_\infty}$, la distribution du champ des vitesses autour de

la sphère doit être du type

$$\vec{v} = v_\infty f\left(\frac{r}{\ell}, R\right)$$

Cette équation montre que deux écoulements sont semblables, pour autant que le nombre de Reynold soit le même.

Ainsi par exemple, si on veut simuler dans l'eau un écoulement dans l'air (au problème de compression près)

comme

$$\begin{aligned} \nu_{\text{eau}} &= 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \\ \nu_{\text{air}} &= 15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

Il faut, pour des dimensions identiques de la sphère, que l'écoulement dans l'eau soit 15 fois plus lent que dans l'air.

3.2.1. Nombre de Froude

Si l'influence de l'accélération de la pesanteur g sur l'écoulement n'est pas négligeable, on aura 4 paramètres au lieu de 3 :

$$\begin{aligned} \nu & \text{ viscosité cinématique [m}^2/\text{s]} \\ \ell & \text{ longueur caractéristique [m]} \\ v_\infty & \text{ vitesse à l' } \infty \text{ [m s}^{-1}\text{]} \\ g & \text{ accélération de la pesanteur [m s}^{-2}\text{]} \end{aligned}$$

On pourra donc former deux nombres sans dimensions. Le premier étant par exemple le nombre de Reynold, on obtient comme deuxième combinaison le nombre

$$F = \frac{v_\infty^2}{\ell g}$$

C'est le nombre de Froud

3.2.2 Nombre de Strouhal

Un autre cas important est celui des écoulements non stationnaire. Les lignes de courant du mouvement de fluide changent de position au cours de temps.

Soit τ une constante de temps caractéristique de ce changement.

On peut alors déterminer, outre le nombre de Reynold, une autre combinaison sans dimension

$$S = \frac{v_{\infty} \tau}{l}$$

C'est le nombre de Strouhal.

3.3. Apparition de la turbulence

Considérons un écoulement limite par un plan dans un fluide incompressible, dans le cas d'un état stationnaire :

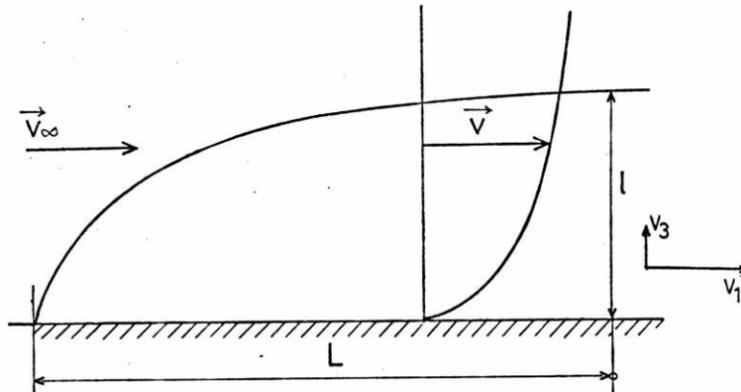


Fig. 17 Couche limite d'une plaque finie

L'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{v}(\nabla \vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}$$

qui se développe comme suit :

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3$$

En définissant un paramètre caractéristique l (épaisseur de la couche) tel que :

$$\frac{v_{\infty}^2}{L} \sim \frac{\nu v_{\infty}}{l^2}$$

on obtient la relation

$$\frac{l}{L} \sim \left(\frac{\nu}{v_{\infty} L} \right)^{1/2} = R^{-1/2} \quad \text{soit} \quad L^2 = R l^2$$

la "longueur de viscosité l " est une échelle de longueur transverse. Elle représente l'épaisseur de la couche limite.

On définit aussi un coefficient de friction C_d par

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 L} = 2$$

avec $D \sim \rho v_{\infty}^2 l$.

d'où $C_d = 2 R^{-1/2}$

Mais on ne peut pas prendre n'importe quelle valeur de v_{∞}

En effet, normalement une petite protubérance va déclencher une ondulation de la ligne de courant qui va en s'amortissant avec la distance.

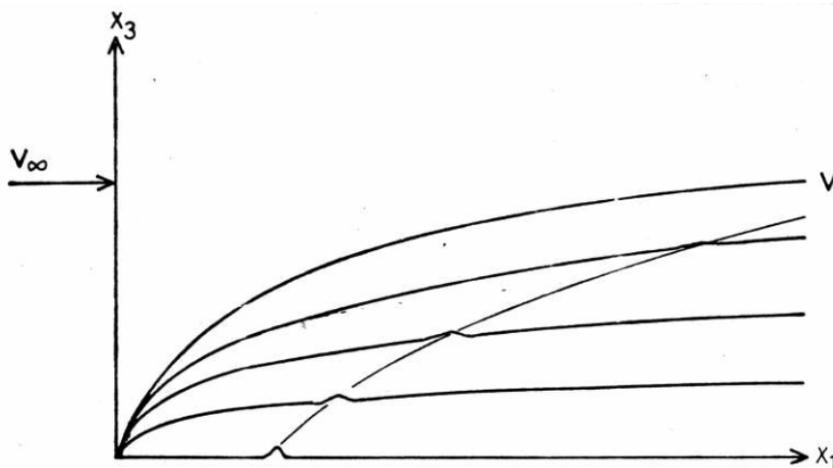


Fig. 18 Ligne de courant perturbée

Pour une certaine valeur de U_∞ , cette oscillation au lieu de s'évanouir, va aller en augmentant et perturber les lignes de courant voisines : le mouvement devient alors turbulent.

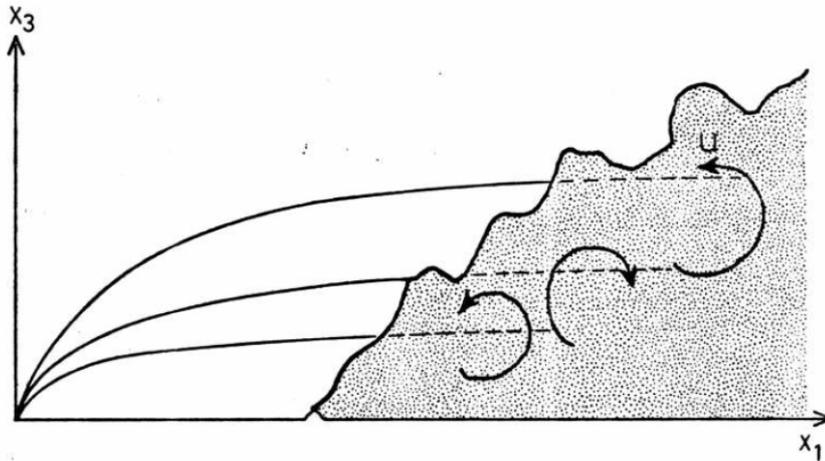


Fig. 19 Apparition de la turbulence

A ce moment, le coefficient de friction change de valeur

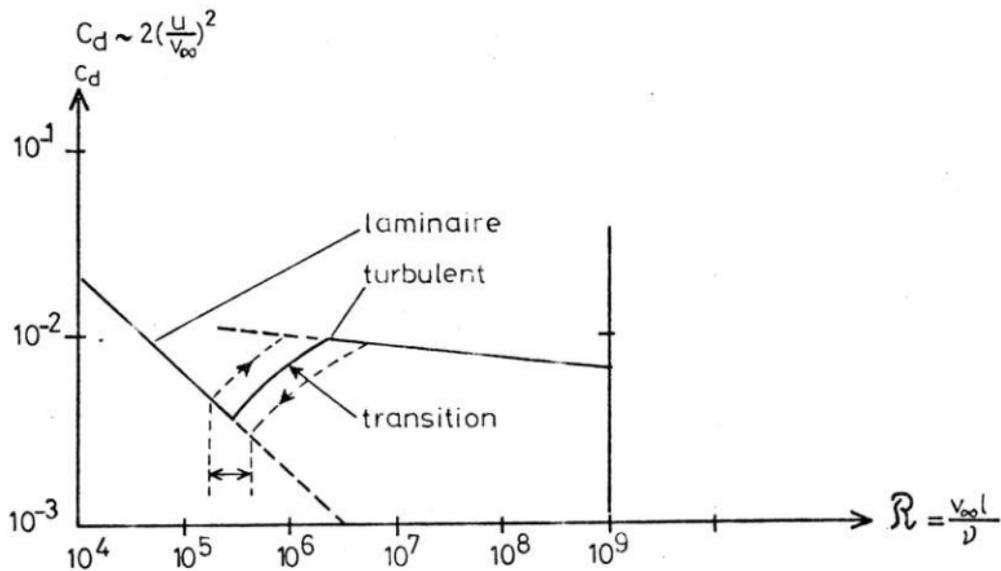


Fig. 20 Passage d'un régime laminaire à un régime turbulent

Le passage du régime laminaire au régime turbulent se caractérise par la disparition des lignes de courant.

Il n'est évidemment plus question de conserver telles quelles les équations de l'hydrodynamique, car les fonctions v , p et ρ ne sont plus intégrables au sens de Riemann.

Voyons maintenant comment on peut remédier à cette difficulté.

3.4. Fonctions aléatoires

Si dans le cas de notre écoulement stationnaire avec couche limite, on lâche à partir d'un point P, un traceur quelconque (par exemple une plume d'oiseau), on observe une trajectoire $f_1(x,y,z,t_1)$.

Cette fonction est la moyenne spatio-temporelle des molécules du fluide qui se trouvent autour de la plume au cours du déplacement : la notion de particule de fluide subsiste localement.

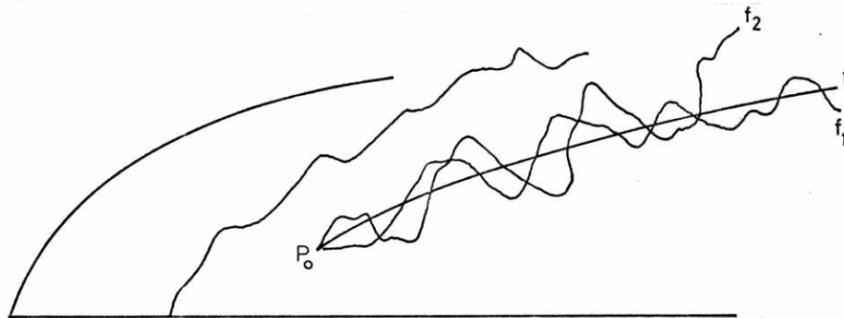


Fig. 21 Trajectoire aléatoire

Si on continue de lâcher une série de plumes à partir du même du point P_0 , on observe une série de trajectoires $f_1(x,y,z,t_n) \dots f_n(x,y,z,t_n)$.

Maintenant, si on ramène toutes ces fonctions à la même origine temporelle (moment du lâcher t_0), on peut calculer la moyenne de ces trajectoires

$$\bar{f}(x,y,z,t) = \frac{1}{n} \sum_1^n f_n(x,y,z,t)$$

C'est une moyenne stochastique ou moyenne "à travers le phénomène aléatoire", ou moment du 1^{er} ordre de la fonction aléatoire.

Au sens de la mécanique aléatoire, les $f_i(x,y,z,t)$ ont les réalisations d'une fonction aléatoire $f(x,y,z,t)$ des paramètres certains x,y,z,t qui représente l'ensemble de toutes les réalisations f_n possibles.

On peut décomposer la fonction aléatoire $f(x,y,z,t)$ en partie certaine $\bar{f}(x,y,z,t)$ et une fonction purement aléatoire $f'(x,y,z,t)$

$$f = \bar{f} + f'$$

f' représente l'ensemble des différences entre la fonction aléatoire f et la fonction certaine \bar{f} , au point P_0 et au temps t .

En passant à la limite, pour $n = \infty$

$$\bar{f}(x, y, z, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n f_i(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, t) p[f(x, y, z, t)] df$$

$p(x, y, z, t)$ est la densité de probabilité de la fonction f au point x, y, z , et au temps t .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots p[f(x, y, z, t)] df \text{ est l'opérateur « moyenne ».}$$

L'application de l'opérateur « moyenne » à une fonction aléatoire f s'écrit \bar{f}

3.4.1. Règles d'application de l'opérateur moyenne

Les règles d'application de l'opérateur "moyenne" sont justifiées par l'axiomatique aléatoire de Dedebant et Wehrlé.

Soit U et V , deux fonctions aléatoire, de paramètres certains. Soit K une fonction certaine ou une constante. Les règles d'application de l'opérateur moyenne sont les suivantes :

1) règle d'addition

$$\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$$

2) règle de multiplication par une constante

$$\overline{k v} = k \bar{v}$$

sachant que $u = \bar{u} + u'$

3) Conséquence

$$\bar{u} = \overline{\bar{u} + u'} = \bar{u} + \bar{u'} \quad \text{donc } \bar{u'} = 0$$

la moyenne de la partie purement aléatoire est nulle, c'est pourquoi U' s'appelle aussi la variable centrée

4) règle de multiplication par une fonction aléatoire

$$\begin{aligned} \overline{u v} &= \overline{(\bar{u} + u') (\bar{v} + v')} = \overline{\bar{u} \bar{v} + \bar{u} v' + u' \bar{v} + u' v'} = \\ &\overline{\bar{u} \bar{v}} + \overline{\bar{u} v'} + \overline{u' \bar{v}} + \overline{u' v'} = \bar{u} \bar{v} + \bar{u} \bar{v'} + \bar{u'} \bar{v} + \overline{u' v'} = \\ &\bar{u} \bar{v} + \overline{u' v'} \end{aligned}$$

5) règle de dérivation par une fonction certaine

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

6) règle d'intégration par une fonction certaine

$$\overline{\int f(u, x) dx} = \int f(g(\bar{u}), x) dx$$

Ces éléments de l'axiomatique aléatoire permettent donc d'appliquer l'opérateur "moyenne" aux équations du fluide turbulent.

3.4.2 Hypothèse ergodique

De la façon où nous avons défini nos fonctions aléatoires, le phénomène n'a pas besoin d'être stationnaire. Mais sauf en laboratoire où on peut répéter plusieurs fois de suite l'expérience pour obtenir des réalisations successives du même phénomène instationnaire, il est nécessaire que le phénomène soit peu variable vis-a-vis du temps pour pouvoir obtenir une moyenne temporelle.

En effet on peut alors utiliser l'hypothèse ergodique et remplacer les moyennes stochastiques par des moyennes temporelles "le long du processus"

$$\langle \langle f \rangle_t \rangle \quad \text{car} \quad \bar{f} \cong \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{f} dt$$

Si l'hypothèse ergodique a été vérifiée dans le cas de la mécanique statistique classique, cela n'a pas encore été fait pour la mécanique des fluides turbulents.

Cependant, les hypothèses de départ sont suffisamment proches pour que l'on puisse appliquer le théorème ergodique de la mécanique statistique à la mécanique des fluides.

En toute rigueur, ce théorème n'est applicable que lorsque $\Delta t \rightarrow \infty$ c'est-à-dire que pour les phénomènes parfaitement stationnaires.

Or l'expérience nous montre que, spécialement dans les régions montagneuses comme la Suisse, les phénomènes dans la couche limite atmosphérique sont rarement stationnaires et en plus des situations identiques au point de vue micro-météorologique sont très peu fréquentes.

3.4.2.1. Echelle temporelle

Pour pouvoir simplement étudier les phénomènes turbulents, il faut introduire un concept supplémentaire qui est l'échelle temporelle du phénomène : c'est l'intervalle de temps Δt durant lequel on effectue la moyenne temporelle $\langle f \rangle_t$ et à l'intérieur duquel l'hypothèse ergodique est approximativement applicable.

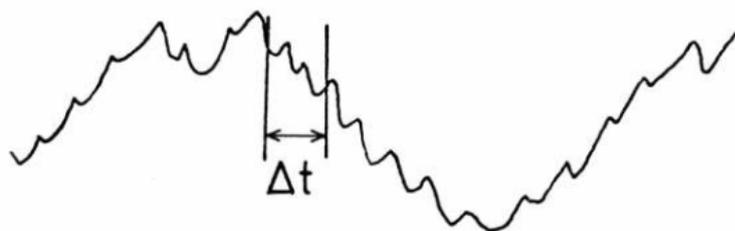


Fig. 22 Echelle temporelle

3.4.2.2. Durée du phénomène, intermittence

Il existe des phénomènes météorologiques dont la durée est particulièrement longue, comme par exemple une dépression quasi-stationnaire. Ils nous permettent d'étudier localement la structure turbulente de la couche limite dans de bonnes conditions de stationnarité.

Il en existe par contre d'autres beaucoup plus fugaces qu'il est très difficile de mesurer. C'est le cas de l'atmosphère diurne convective

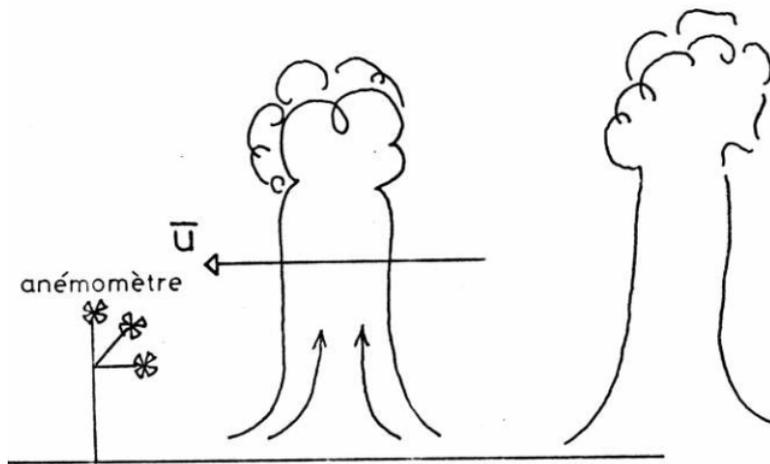


Fig. 23 Ascendances thermiques

Considérons l'ascendance thermique de la Fig. 23, l'anémomètre, et particulièrement l'hélice verticale, ne mesurera tout d'abord pratiquement rien, puis lorsque l'ascendance, poussée par le vent général \vec{u} atteindra l'anémomètre, on mesurera une forte composante verticale turbulente du vent jusqu'à ce que l'ascendance l'ait quitté.

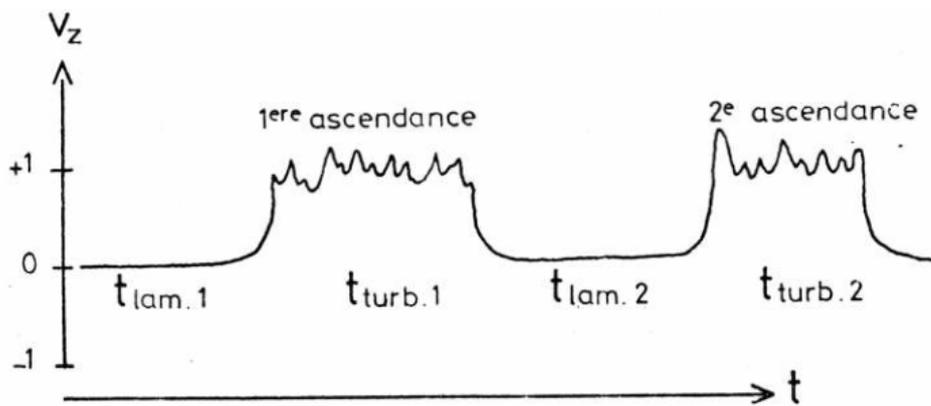


Fig. 24 Passage d'une ascendance thermique sur un anémomètre

Le phénomène se répétera pour chaque ascendance qui passera par l'anémomètre.

On appellera indice d'intermittence γ le rapport entre le temps où le phénomène est turbulent et le temps total.

$$\gamma = \frac{\sum t_{\text{turb.}}}{t}$$

3.5. Les équations de Reynold

Traisons le cas du fluide visqueux incompressible. Les équations de Navier Stokes "aléatorisées" s'écrivent

$$\overline{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}(\nabla \vec{v})} = -\frac{1}{\rho} \overline{\text{grad } p} + \overline{\Delta(\nu \vec{v})}$$

soit en notation d'Einstein

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \overline{v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \overline{\nu v_i}}{\partial x_i \partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3$$

pour un fluide incompressible $\rho = \text{cte}$ d'où $\rho \equiv \bar{\rho}$

Dans l'approximation de Reynold, on considère la viscosité cinématique ν comme une grandeur certaine.

En appliquant les règles de l'opérateur "moyenne"

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \overline{v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_i \partial x_j}$$

Il apparaît des moments du 2ème ordre $\overline{v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}}$ uniquement dans le terme complémentaire d'Euler. En supposant que

$$\overline{v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v_j v_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v_i v_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v_j' v_i'}$$

L'équation de Reynold s'écrit

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v}(\nabla \bar{v}) = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \bar{p} + \mu \nabla \bar{v} - \overline{v'(\nabla v')}$$

le dernier terme contient le tenseur des contraintes de Reynold $\overline{v_i' v_j'}$

3.5.1. Tenseur de Reynold

Dans notre système d'équations de l'hydrodynamique, nous voyons apparaître avec le tableau des nouveaux termes $\overline{v'_i v'_j}$ inconnus.

Il s'agit donc de trouver de nouvelles équations qui permettront de "fermer" notre système.

Écrivons le tenseur de Reynold sous forme de tableau

$$\overline{v'_i v'_j} = \begin{bmatrix} \overline{v_1'^2} & \overline{v_1' v_2'} & \overline{v_1' v_3'} \\ \overline{v_2' v_1'} & \overline{v_2'^2} & \overline{v_2' v_3'} \\ \overline{v_3' v_1'} & \overline{v_3' v_2'} & \overline{v_3'^2} \end{bmatrix}$$

Comme

$$\overline{v'_i v'_j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v'_{ki} \cdot v'_{kj} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v'_{kj} \cdot v'_{ki} = \overline{v'_j v'_i} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, \dots, n \end{matrix}$$

v'_{ki} = partie purement aléatoire de la $k^{\text{ème}}$ réalisation de la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur aléatoire \vec{v}

On a en fait 6 termes supplémentaires

$$\overline{v_1'^2}, \overline{v_2'^2}, \overline{v_3'^2}, \overline{v_1' v_2'}, \overline{v_1' v_3'}, \overline{v_2' v_3'}$$

qu'il faut calculer. On a donc besoin de 6 équations supplémentaires pour avoir un système complet.

3.5.2. Théorie semi empirique

De nombreuses théories semi empiriques ont été développées pour tenter de résoudre ce problème.

Ces théories font toutes l'hypothèse d'un écoulement stationnaire.

Localement, on considère une orientation particulière du système de références. Dans la couche limite atmosphérique, on le définit comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \vec{v} = \bar{v}_1 && \text{composante dans le sens de l'écoulement} \\ \bar{v} &= 0 = \bar{v}_2 && \text{composante horizontale perpendiculaire à l'écoulement moyen} \\ \bar{w} &= 0 = \bar{v}_3 && \text{composante verticale} \end{aligned}$$

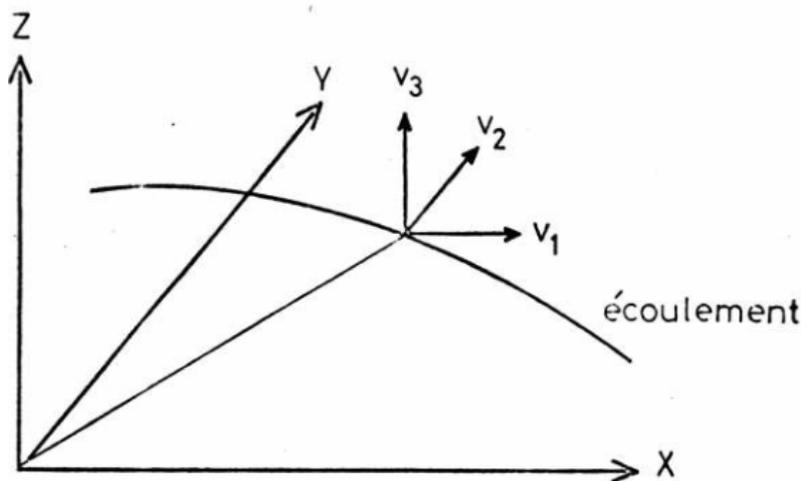


Fig. 25 Référentiel quelconque

Parmi les théories semi empiriques, citons :

- la théorie de Boussinesque $\overline{u'v'} = -\varepsilon \frac{du'}{dy}$
 ε coefficient d'échange turbulent

- la théorie de Prandtl $|\overline{u'}| = l \frac{d\bar{u}}{dy}$
 l longueur de mélange

- la théorie isotropique de Taylor

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2}$$

$$\overline{uv} = \overline{uw} = \overline{vw} = 0$$

Les théories spécifiques de la couche limite atmosphérique sont développées dans le cours "Turbulence atmosphérique ».

Une méthode souvent utilisées pour essayer de "fermer" le système consiste a combiner une équation de Navier Stokes "aléatorisée" avec l'équation d'une réalisation particulière des variables aléatoires.

Pour un écoulement incompressible, on a :

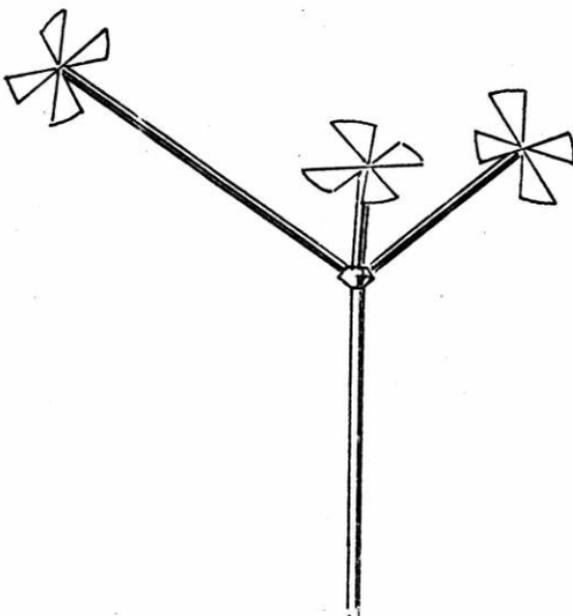
$$\frac{\partial \vec{v} + \vec{v}'_i}{\partial t} + (\vec{v} + \vec{v}'_i) (\nabla (\vec{v} + \vec{v}'_i)) = -\frac{1}{\rho} \text{grad} (\bar{p} + p'_i) + \mu \nabla^2 (\vec{v} + \vec{v}'_i)$$

L'équation de Navier Stokes reste valable pour une réalisation particulière de l'écoulement.

Mais de notre avis, une telle méthode n'est pas valable, car elle implique de connaître à un instant donné (conditions initiales) le champ des \vec{v}'_i qui ne peut pas être pris de façon quelconque. En particulier, si on pose comme condition initiale $\vec{v}'_i = 0$

cela implique que les $\sum_k \frac{\partial v'_i v'_j}{\partial x_j} = 0$

Nous allons montrer ici une méthode d'étude de la structure de la turbulence du vent au moyen d'un anémomètre à hélices NEZ, que nous avons développé.



L'anémomètre est composé de 3 bras perpendiculaire entre eux et faisant un angle constant avec la verticale. Chaque bras est de longueur différente de telle sorte que pour un vent principalement horizontal une hélice ne soit pas sous le vent d'une autre. Cette disposition augmente considérablement la précision de la mesure de la composante verticale du vent. Les hélices ont une réponse cosinusoidale par rapport à la direction du vent. Les hélices donnent une impulsion électrique pour un parcours du vent dans l'axe de 10cm. Le seuil de fonctionnement est d'environ 15cm/s

Fig. 26 Anémomètre à hélice

3.6. Éléments de la théorie aléatoire gaussienne en un point

Les différentes théories de fermeture qui ont été développées à ce jour font appel à diverses hypothèses semi-empiriques.

Nous sommes en train de développer une théorie localement anisotrope, mais qui est basée sur l'hypothèse que la turbulence est entièrement décrite par les moments du 1er et du second ordre et les gradients des vitesses.

En effet, on peut montrer que la précision des mesures nécessaires au calcul des moments d'ordre supérieur croît avec l'ordre de ceux-ci. Cela veut aussi dire que la quantité d'information qu'apportent les moments d'ordre supérieur décroît avec l'ordre de ceux-ci.

3.6.1. Corpuscule aléatoire

Dans le cas des écoulements laminaires, nous avons défini une particule de fluide, caractérisée par une échelle spatiale représentée par le volume élémentaire DV , et animée d'une vitesse certaine \vec{v} . Pour les écoulements turbulents, nous allons compléter cette représentation en introduisant l'échelle temporelle Δt et le tenseur de Reynold $R_{ij} = \overline{v_i v_j}$. Nous verrons ultérieurement la signification physique de cet tenseur. Nous appellerons "corpuscule aléatoire" cette particule de fluide turbulent.

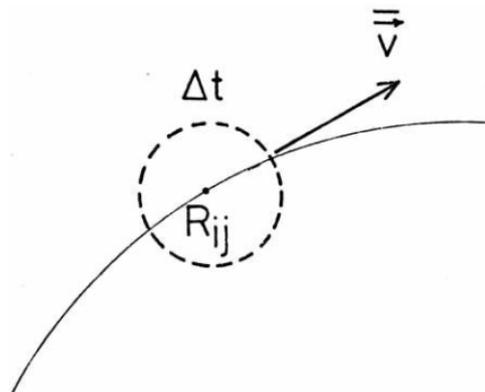


Fig. 27 *Corpuscule aléatoire*

3.6.2 Distribution gaussienne

3.6.2.1. Cas à une dimension

On dit qu'une variable aléatoire x est gaussienne lorsque sa densité de probabilité $p(x)$ a la forme particulière

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{où} \quad \sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad \text{écart type}$$

On remarque que cette forme particulière de la densité de probabilité est entièrement définie par le moment du 1^{er} ordre \bar{x} et du 2^{ème} ordre $\overline{x^2}$.

Rappel

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx .$$

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$$

3.6.2.2. Cas à 3 dimensions

La fonction aléatoire vitesse \vec{v} est un vecteur à 3 dimensions.

La représentation la plus générale de cette fonction aléatoire est donc une densité de probabilité composée (triple)

$$p(\vec{v}) \equiv p(v_1, v_2, v_3)$$

qui est la probabilité d'obtenir la réalisation \vec{v}_k de la fonction aléatoire \vec{v} avec à la fois les composantes V_{1k}, V_{2k}, V_{3k} . La forme gaussienne de cette densité de probabilité s'écrit en notation tensorielle

$$p(\vec{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\Lambda|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\Lambda} C_{nm} (v_n - \bar{v}_n)(v_m - \bar{v}_m)\right]$$

Λ est le déterminant

$$\Lambda = \left| \Lambda_{nm} \right|$$

avec $\Lambda_{nm} = (v_n - \bar{v}_n)(v_m - \bar{v}_m) = v'_n v'_m$

et $C_{nm} = (-1)^{n+m} |\Lambda_{nm}|$

Λ_{nm} matrice obtenue en supprimant la ligne n et la colonne m dans le déterminant Λ .

3.6.3. Référentiel naturel.

Il existe pour un écoulement donné plusieurs référentiels privilégiés. Le référentiel naturel est la référentiel le plus utilisé par les spécialistes de la turbulence.

Dans le cas de la couche limite, on prend comme premier axe X_1 l'axe du vent moyen

$$\langle v \rangle_t = \sqrt{\overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} + \overline{v_3^2}}$$

la composante de la vitesse correspondante est notée U

le 2ème axe X_2 est l'axe horizontal, perpendiculaire à la composante de la vitesse correspondante est notée V

le 3ème axe est l'axe perpendiculaire au 2 autres la composante de la vitesse correspondante est notée W

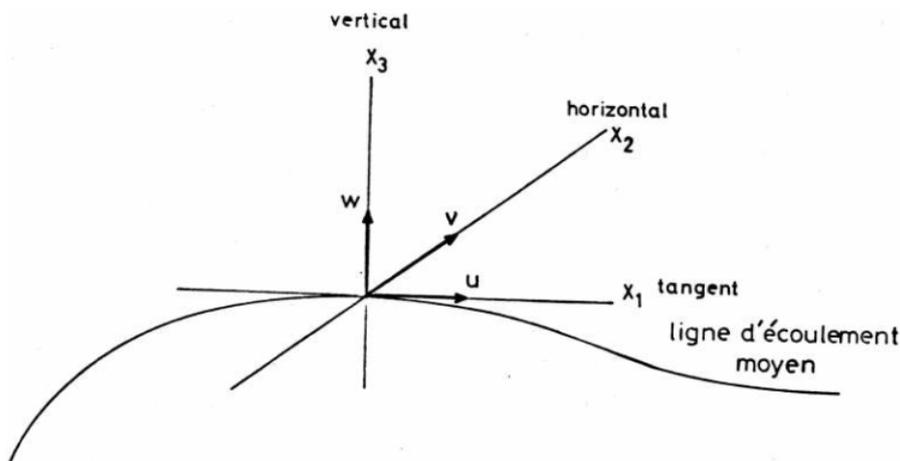


Fig. 28 Référentiel naturel

Dans ce système d'axe

$$\bar{u} = \sqrt{\overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} + \overline{v_3^2}}$$

v_1, v_2, v_3 composantes dans un système d'axes quelconques

Mais dans ce système d'axes, les moments centrés du 2ème ordre

$$\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}, \overline{u'v'}, \overline{u'w'}, \overline{v'w'}$$

ne sont en général pas nuls.

3.6.4. Ellipsoïde de diffusion

En notation tensorielle, cette quadrique Prenons un système d'axes covariant quelconques, l'équation

générale d'une ellipsoïde est $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x^i x^j = 1$ l'équation de la quadrique de la forme

$$a_{11}x^1{}^2 + a_{22}x^2{}^2 + a_{33}x^3{}^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 - 1 = 0$$

En notation tensorielle, cette quadrique s'écrit tout simplement

$$\Psi = a_{ij} x^i x^j = 1 \quad i, j = 1, 2, 3$$

3.6.4.1. Recherche des axes principaux

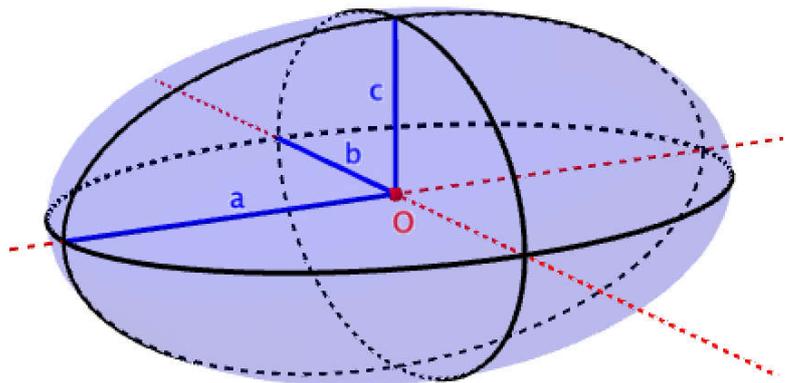


Fig.28 Ellipsoïde de diffusion

Il s'agit d'effectuer un changement d'axes de telle sorte que le nouveau système de coordonnées coïncide avec ceux de l'ellipsoïde.

Dans ce système d'axes $x^1_{el}, x^2_{el}, x^3_{el}$ l'équation de l'ellipsoïde s'écrit

$$C_{11} x^1_{el}{}^2 + C_{22} x^2_{el}{}^2 + C_{33} x^3_{el}{}^2 - 1 = 0$$

avec $a_i = \left(\frac{1}{C_{ii}}\right)^{\frac{1}{2}}$ demi axes de l'ellipsoïde

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de la forme quadratique.

A est une matrice symétrique réelle, d'où

$$A = A^{(*)}$$

$A^{(*)} = A(a_{j i})$ ce qui signifie que $a_{i j} = a_{j i}$

Le changement d'axe est une rotation caractérisée par une matrice

$$B = (b_{ij}) \text{ telle que } \vec{x} = B \vec{x}_{e\ell}$$

avec la condition que dans ce nouveau repère, la forme quadratique

$$\varphi_e = C_{ik} x_{e\ell}^i x_{e\ell}^k \text{ soit diagonale}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}$$

Mais le calcul matriciel donne la relation

$$C = B^* A B$$

De plus dans une transformation orthonormale telle que nous la définissons

$$C = B^{-1} A B$$

B^{-1} étant la matrice inverse de B

définie par $B B^{-1} = I$

I matrice unitaire
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cela implique que les C_{ij} sont les valeurs propres de la matrice A dont les valeurs sont trouvées en résolvant l'équation ci-dessous

$$\begin{vmatrix} a_{11} - C_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - C_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - C_{33} \end{vmatrix} = 0$$

C'est l'équation d'une cubique dont il existe une solution analytique.

De la, on calculera, les éléments de la matrice rotation **B**.

On identifiera l'ellipsoïde défini ci-dessus avec l'ellipsoïde de turbulence

en posant

$$a_{ij} \equiv \overline{v'_i v'_j}$$

Dans le référentiel de l'ellipsoïde

$$v'_i v'_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Par ce changement d'axe, on a éliminé 3 des termes du tenseur de Reynold.

Ce type de calcul se fait évidemment au moyen d'un ordinateur qui donne directement le \mathbf{a}_{ij} en temps réel lors se qu'il est relié à un anémomètre tridimensionnel.

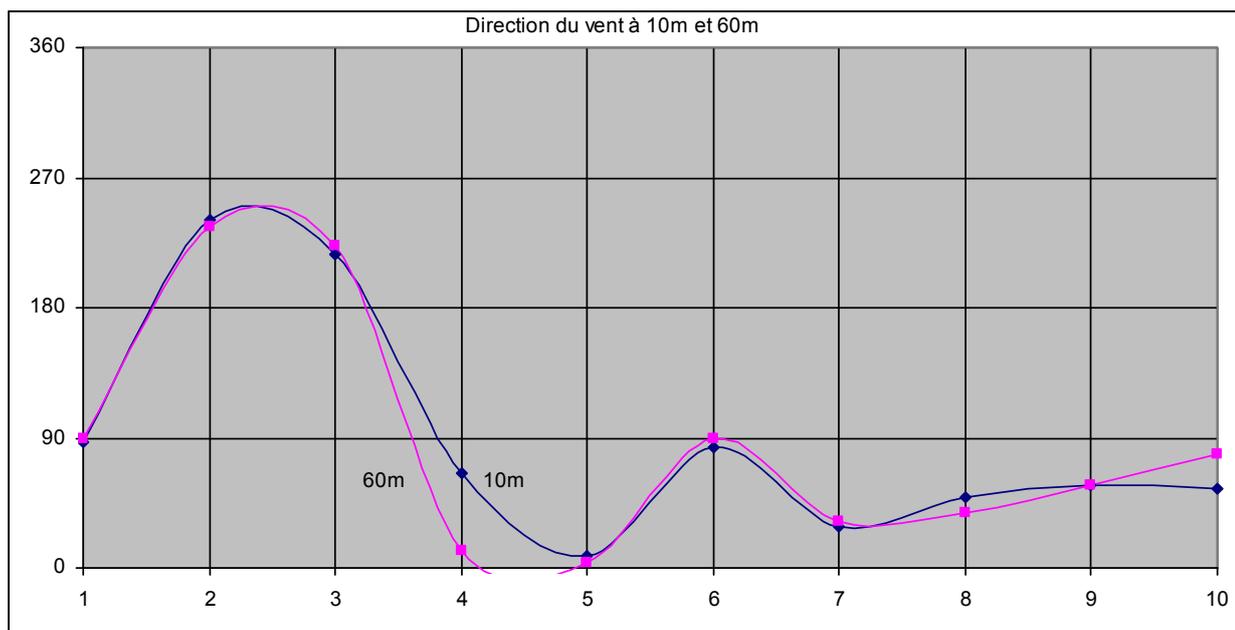
Exemple : Station micrométéorologique de Leibstadt

Mesures des angles que fait le référentiel de l'ellipsoïde avec le référentiel naturel

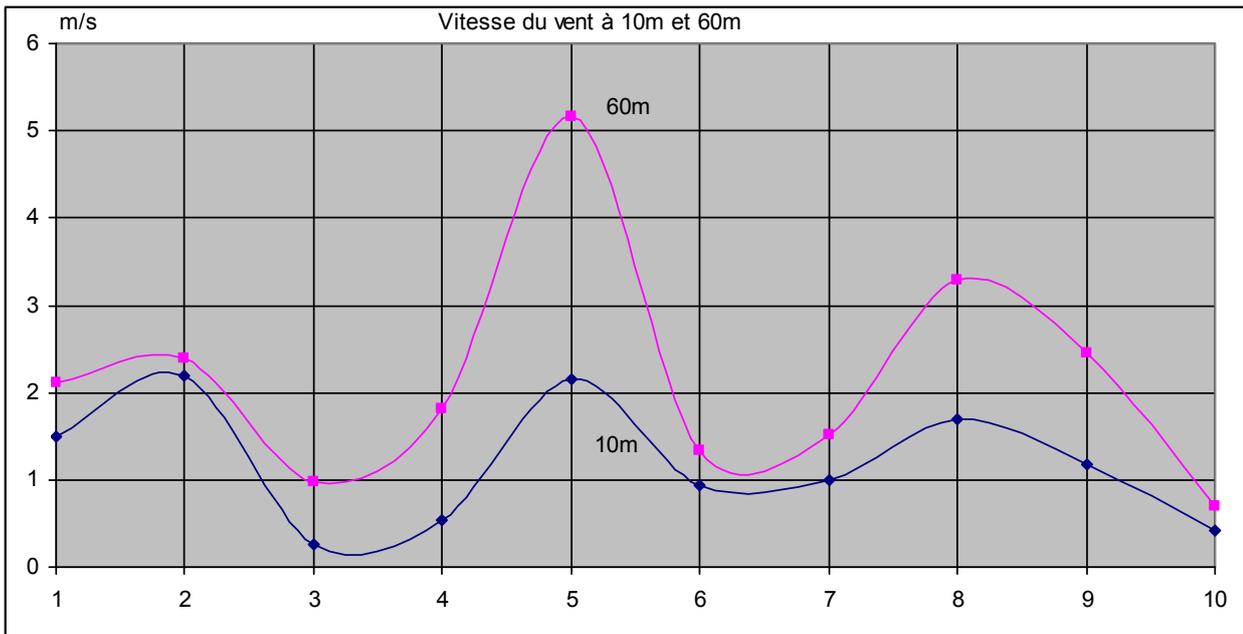
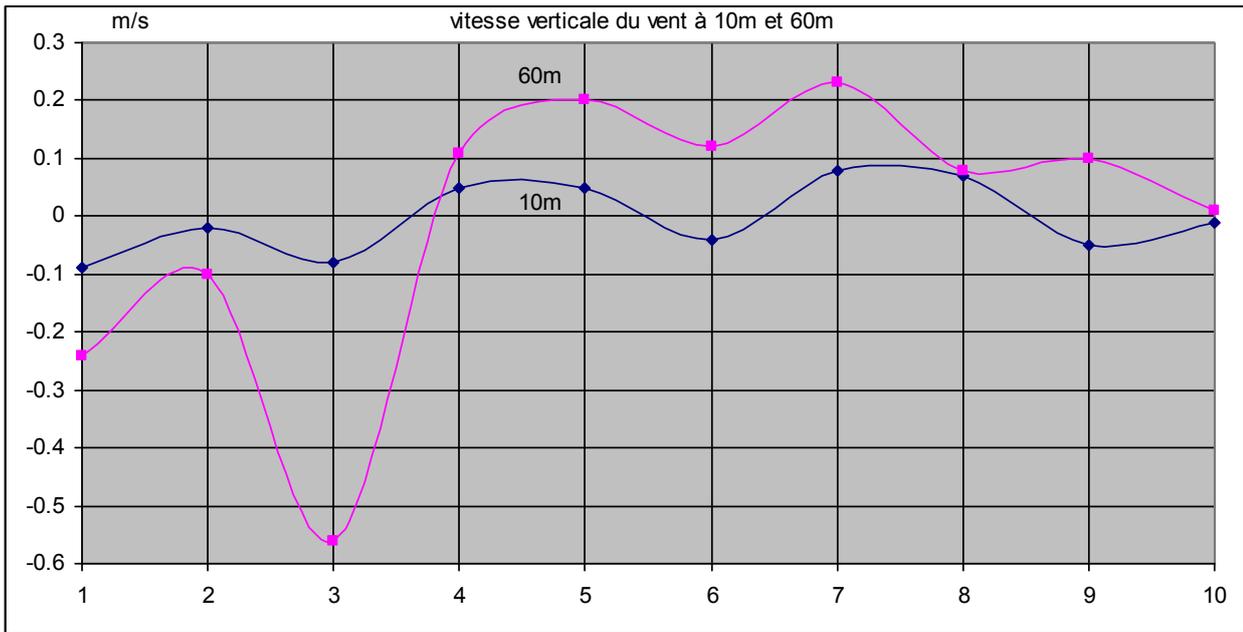
Mesures du vent de Leibstadt

Les mesures du vent ont été effectuées à Leibstadt par deux anémomètres tridimensionnels NEZ installés à 10m et 60m du sol avec d'autres capteurs météorologiques.

Chaque capteur Nord, Est et Zenith de l'anémomètre donne une impulsion pour un parcours du vent de 10cm dans l'axe de l'hélice. Les impulsions sont comptées dans un intervalle de temps défini, par exemple 10 secondes. Les données sont perforées sur une bande de papier genre Telex. Les données sont ensuite transférées sur cartes perforées type IBM puis traitées sur un superordinateur Cray de l'EPFL. Pour limiter le nombre de données on procède tous les quelques jours à une séquence de mesures. Les résultats des calculs de chaque séquence sont représentés par des points sur les graphiques ci-dessous. Les tables ci-dessous donnent les résultats des calculs comprenant les paramètres de l'ellipsoïde de diffusion.

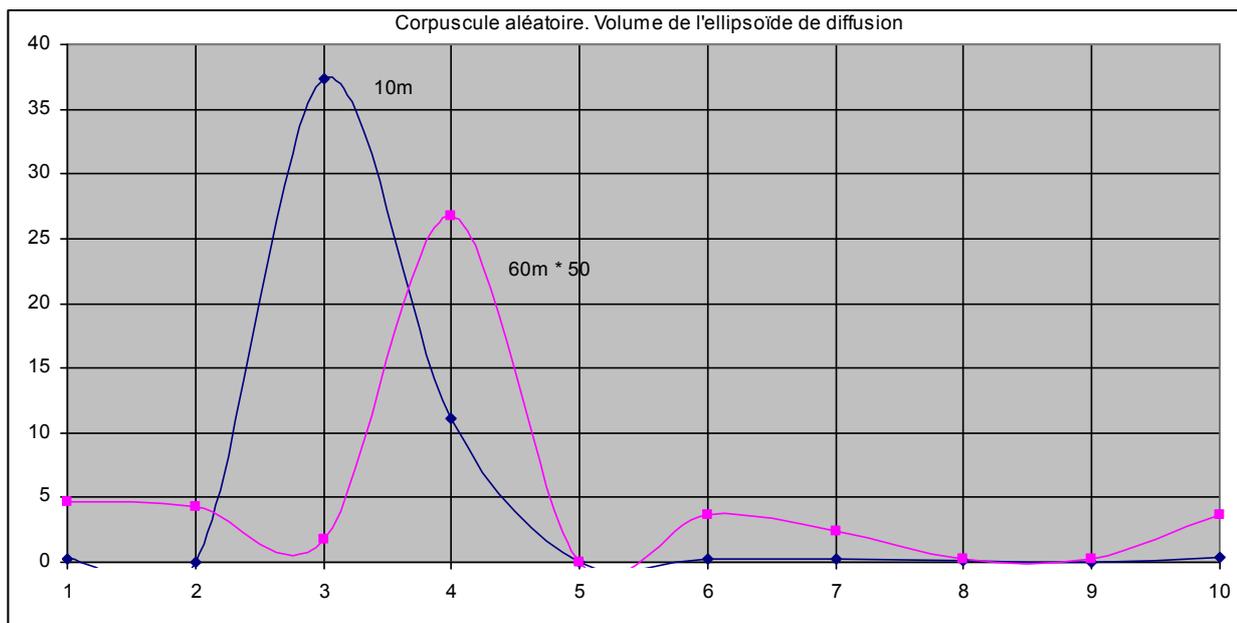


La direction du vent à 10 mètre suit remarquablement bien celle à 60 mètre



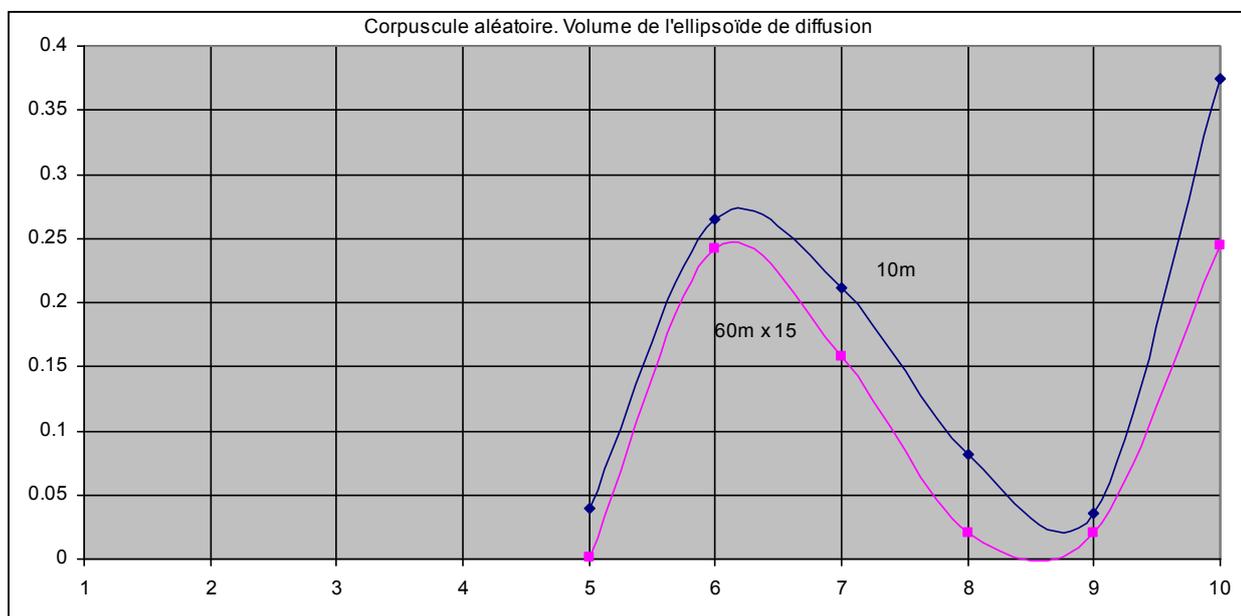
Lorsque le vent est fort, la vitesse à 10m est nettement plus faible

Ellipsoïde de diffusion



De façon générale l'ellipsoïde de diffusion est beaucoup plus grand à 10m qu'à 60m.

Les périodes de vent faibles et variables entraînent un grand facteur de diffusion, mais à faible vitesse.



Lorsque le vent est fort la variation du volume de l'ellipsoïde de diffusion à 60m suit remarquablement celle à 10m, mais à un facteur 15 près.

Série	Date	Haut. [m]	Nb. Mesures	v [m/s]	θ_{NORD}		V_{NORD} [m/s]	V_{EST} [m/s]	V_{ZENITH} [m/s]
1	2231204	60	596	2,11	90,8	-6,5	-0,03	2,10	-0,24
1		10		1,49	93,1	-3,5	-0,08	1,49	-0,09
2	2231318	60	597	2,40	303,6	-2,4	1,33	-2,00	-0,10
2		10		2,20	299,7	-0,5	1,09	-1,91	-0,02
3	2231405	60	237	0,97	317,6	-30	0,58	-0,53	-0,56
3		10		0,25	323,6	17,7	0,19	-0,14	-0,08
4	2231425	60	598	1,82	12,36	3,46	1,78	0,39	0,11
4		10		0,54	65,8	5,3	0,22	0,49	0,05
5	2231505	60	357	5,17	3,8	2,2	5,16	0,34	0,20
5		10		2,16	8,5	1,3	2,13	0,32	0,05
6	2280930	60	1236	1,34	90,4	5,12	-0,01	1,33	0,12
6		10		0,94	83,9	-2,44	0,10	0,94	-0,04
7	2231606	60	477	1,51	32,1	8,7	1,26	0,79	0,23
7		10		0,99	28,9	4,6	0,87	0,48	0,08
8	2231711	60	598	3,28	37,9	1,4	2,59	2,02	0,08
8		10		1,69	48,8	2,4	1,11	1,27	0,07
9	2231729	60	596	2,45	56,8	2,3	1,34	2,05	0,10
9		10		1,18	57,8	2,4	0,63	1,00	-0,05
10	321350	60	3900	0,70	78,5	0,8	0,12	0,59	0,01
10		10		0,42	54,8	1,4	0,24	0,34	-0,01

Hauteur [m]	Mesures	1/2 axe 1	1/2 axe 2	1/2 axe 3	θ_{11}	θ_{22}	θ_{33}	écart	σV	V
60	1	0.43	0.27	0.19	28	30	38	0.34	0.54	0.0924
10	1	0.58	0.52	0.23	58	57	14		0.81	0.29057
60	2	0.37	0.29	0.19	47	66	53	0.09	0.51	0.0854
10	2	0.4	0.23	0.13	41	42	8		0.48	0.0501
60	3	0.38	0.2	0.11	88	48	79	1.18	0.44	0.03502
10	3	3.36	1.84	1.44	62	54	48		4.09	37.2914
60	4	2.34	0.26	0.21	24	45	38	1.08	2.36	0.53518
10	4	3.74	0.91	0.78	82	85	61		3.13	11.1198
60	5	0.08	0.05	0.03	28	25	16	0.82	0.1	0.0005
10	5	0.42	0.17	0.13	14	18	21		0.47	0.03888
60	6	0.57	0.19	0.16	18	76	73	0.35	0.62	0.07258
10	6	0.82	0.35	0.22	27	27	14		0.92	0.26448
60	7	0.36	0.21	0.15	44	29	53	0.42	0.44	0.0475
10	7	0.49	0.43	0.24	14	8	11		0.65	0.21182
60	8	0.2	0.12	0.06	40	41	11	0.64	0.24	0.00603
10	8	0.39	0.31	0.16	63	62	14		0.52	0.08103
60	9	0.16	0.13	0.07	72	72	8	0.7	0.22	0.0061
10	9	0.26	0.23	0.14	33	31	18		0.37	0.03507
60	10	0.5	0.25	0.14	34	34	0	0.5	0.58	0.0733
10	10	1.17	0.45	0.17	56	56	0		1.27	0.37492

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

"Mécanique des fluides" - Landau Et Lifchitz - Edition MIR

Moscou 1971

"Mesure de l'inconnexe d'une fonction aléatoire" P. Ravussin -

Thèse EPFL. Imprimatur No 126

"Turbulent diffusion in the environment" - G.T. Csanady -

D. Reidel Publishing Company - 1973 - Dodrecht - Holland/Boston USA

"A First Course in Turbulence" Tennekes and Lumley- The MIT Press -

1973 Cambridge, Massachusetts + London, England 19

"Théorie de la prévisibilité" Dr. P. Ravussin - 1973 - Publication

No 134 - Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

"La mécanique aléatoire de Georges Dedebant et Philippe Wherlé" -

F. Baatard + S. Magnin - 1972 - Publication No 124 - Ecole Polytechnique

Fédérale de Lausanne