THEORIE GENERALE DE LA DIFFUSION TURBULENTE.

1 Introduction

Par son activité, l'homme est arrivé à modifier de façon notable son environnement en y rejetant toute sorte de déchets, que ce soit à l'échelle locale, régionale, ou à l'échelle globale (augmentation du CO_2 dans l'atmosphère par exemple).

Si le transport d'un polluant est facile à exprimer à partir des valeurs moyennes des écoulements, le calcul de la répartition dans l'espace, due à la diffusion turbulente, est beaucoup plus ardu. Une des difficultés provient du fait que la description de la diffusion turbulente ne s'exprime correctement qu'à partir d'un référentiel mobile (lagrangien) en mouvement avec l'écoulement moyen.

La Mécanique Aléatoire a introduit la notion de corpuscule aléatoire en instance de diffusion, dont le centre de diffusion suit le mouvement moyen. La description naturelle de la diffusion turbulente se fait donc dans le référentiel lagrangien centré sur le corpuscule aléatoire. Nous verrons que les développements mathématiques introduisent un certain nombre de paramètres qui définissent entièrement la turbulence. Ces paramètres doivent être définis par l'expérimentation. Or ils sont par nature lagrangiens. Malheureusement les mesures lagrangiennes sont rares, peu précises et difficile à mettre en oeuvre (ballons à volume constant dont on suit la trajectoire par exemple).

Nous allons montrer aussi qu'il est possible, sous certaines conditions, de calculer les coefficients lagrangiens de la diffusion turbulente à partir de mesures euleriennes (référentiels fixes)

2 Méthode

Le mouvement d'un fluide non turbulent est entièrement décrit par un système de cinq équations qui sont les équations d'Euler (ou de Navier Stokes), une équation de continuité et une équation thermodynamique reliant par exemple la pression, la densité et la température du fluide.

Pour un fluide non visqueux, ces équations sont réversibles : La connaissance de l'état du fluide à un moment donné permet de déterminer quel avait été son état dans le passé ou quel sera son état dans le futur.

Les équations d'Euler peuvent être remplacées par les équations de Lagrange qui permettent de suivre individuellement chaque particule du fluide. Elles font appel au principe de moindre action ou de Hamilton.

On introduira encore les équations de Fick qui expriment la diffusion moléculaire d'une particule de fluide.

Dans le concept de la mécanique aléatoire, il est possible de remplacer les variables certaines de la mécanique des fluides non turbulent par des variables aléatoires. L'axiomatique aléatoire permet d'appliquer l'opérateur moyenne au quatre opérations arithmétiques usuelles, mais sous certaines conditions, à la dérivée et l'intégrale.

En "aléatorisant" les équations générales de l'écoulement et en y appliquant l'opérateur moyenne on obtient les équations lagrangiennes de la diffusion turbulente. Les moments de divers ordres qui résultent de ces opérations sont les paramètres lagrangiens de la diffusion turbulente. La particule de fluide est devenue un corpuscule aléatoire en instance de diffusion.

On montrera ensuite sous quelles conditions des mesures euleriennes peuvent être utilisées pour déterminer les paramètres lagrangiens de la diffusion turbulente.

3 Définitions

Une ***variable aléatoire*** **X** est définie par l'ensemble de ses ***réalisation*s** x_j où **j = 1, .., n.** Les $\mathbf{x_j}$ sont des grandeurs certaines, par exemple des nombres réels.

La ***fonction de répartition*** $\mathbf{F(}x_j\mathbf{)}$ est la probabilité pour qu'une réalisation x_i soit inférieur à x_j**.**

$$\mathbf{F}(x_i) = \text{prob. } (x_i < x_j)$$

La ***densité de probabilité*** $\mathbf{p(}x_j\mathbf{)}$ est la fréquence relative d'apparition de la valeur x_j.

$$\mathbf{P}(x_i) = \frac{\delta F(x_i)}{\delta x_i}$$

Entre deux variables $\mathbf{X^1}$ et $\mathbf{X^2}$, on peut définir la ***densité de probabilité composée***

$\mathbf{p(x^1{}_j, x^2{}_i)}$ avec

$$\mathbf{P}(x^1{}_i, x^2{}_j) = \frac{\delta^2 F(x^1{}_i, x^2{}_j)}{\delta x^1{}_i\, \delta x^2{}_j}$$

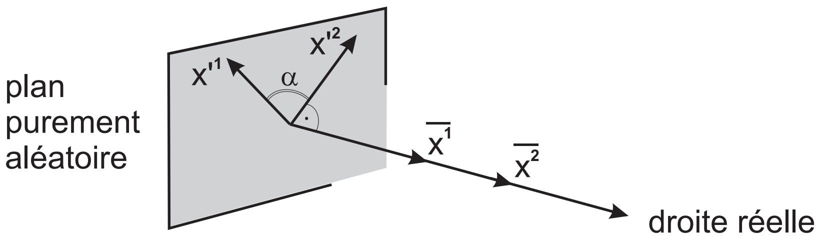
Etc.

Par exemple $X^{\mathbf{1}}$ représente l'ensemble des mesures de température d'un milieu supposé stable

4 Espace aléatoire

Une variable $\mathbf{X^1}$ peut être représentée par un ***vecteur aléatoire*** à 2 dimensions

composé du ***vecteur certain*** $\overline{x^1}$ et du ***vecteur purement aléatoire*** x'^1 qui lui est orthogonal.



La barre de surlignement représente l'opérateur moyenne

$\cos \alpha = \rho_{x'^1 x'^2}$ est le coefficent de correlation des variables aléatoires $\mathbf{X^1}$ et $\mathbf{X^2}$

En généralisant, n variables aléatoires $\mathbf{X^n}$ définissent un ***espace aléatoire*** à **n + 1** dimensions, au plus, composé de la ***droite certaine*** et de l'***espace purement aléatoire*** à **n** dimensions, au plus.

avec $\mathbf{\cos} \alpha^{ij} = \rho^{ij}$. coefficient de corrélation entre les variables aléatoires X^i et X^j

Une ***fonction aléatoire*** **f (t_1, t_2, ... t_n)** est une variable aléatoire fonction de ***paramètres certains*** **t_1, t_2, ... t_n**

Pour chacune des valeurs des paramètres t, on peut, de même, décomposer la fonction aléatoire en sa ***moyenne aléatoire*** = ***moyenne à travers le processus*** = ***partie certaine*** et en sa ***partie purement aléatoire***.

5 Corpuscule aléatoire

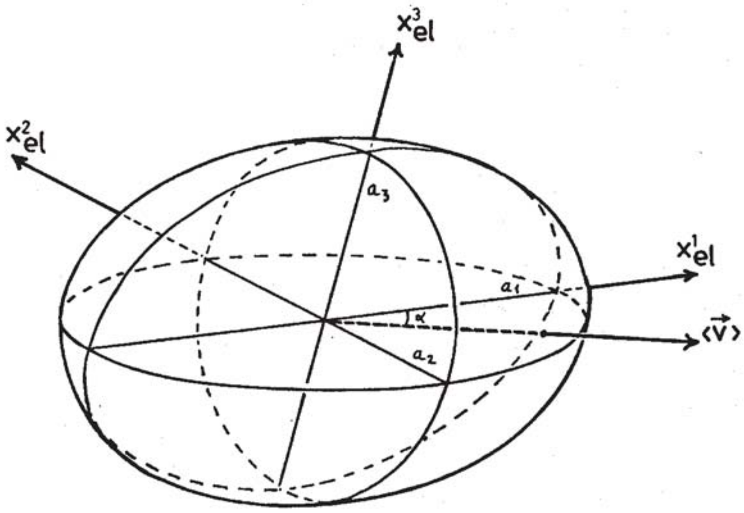
Considérons maintenant l'écoulement d'un fluide. Il est représenté dans l'***espace - temps galiléen certain*** par le champ des vecteurs vitesses tridimensionnels. Considérons un repère lagrangien cartésien, d'orientation fixe, qui se déplace le long d'une ***ligne de courant*** à la vitesse moyenne définie en chaque point de celle-ci. Nous remplaçons chaque composante du vecteur vitesse par une variable aléatoire. Nous avons localement un espace tridimensionnel aléatoire orthogonal à une espace certain lui aussi tridimensionnel.

L'***axiomatique aléatoire*** démontre la validité des opérations de dérivée et d'intégrale sur les fonctions aléatoires sous certaines conditions de continuité.

L'espace purement aléatoire est donc défini en chaque point de la ligne de courant.

Définissons le corpuscule aléatoire au temps $\mathbf{t_1}$ comme un point de masse certaine **M** placé à l'intersection de la ligne de courant au temps $\mathbf{t_1}$ avec l'espace aléatoire des vitesses **V'**. Par intégration nous obtenons l'espace aléatoire **X'**.

Le corpuscule aléatoire diffuse dans l'espace **X'** à la vitesse **V'**. Les segments de droite **V' t** sont les demi axes obliques de l'ellipsoïde de diffusion. Nous définissons que la densité **r** du corpuscule aléatoire vaut $\mathbf{r_s = r_0\ e^{-1}}$ sur la surface de l'ellipsoïde où $\mathbf{r_0}$ est la densité au centre du corpuscule aléatoire (sur la ligne de courant). Il est donc possible maintenant de calculer les paramètres et la densité du corpuscule aléatoire en tout point de l'espace aléatoire.



Corpuscule aléatoire

Thèorème ergodique

Le thèorème ergodique indique que dans le cas stationnaire il est possible de remplacer les moyennes "à travers le processus" par des moyennes calculées "le long du processus", c'est à dire au cours du temps.

De manière analogue il est possible de montrer dans quelles conditions il est possible de calculer les coefficients de la diffusion lagrangienne à partir de mesures eulériennes.

(A suivre)

Adresse de l'auteur
pierre.ravussin@vtxnet.ch

Bibliographie

1. G. Dedebant et Ph. Wherlé : Mécanique aléatoire, Portugaliae Physica, 1945
2. G. Dedebant : Essai d'une axiomatique aléatoire, Publicciones de la Facultad de Ciencias fisico-matematicas, La Plata, 1948
3. F. Baatard : Structure générale d'une mécanique de la diffusion, thèse no 3927, EPFZ, 1963
4. P. Ravussin : Mesure de l'inconnexe d'une fonction aléatoire (théorie de la prévisibilité), thèse No 126, EPFL, 1971
5. F. Baatard et S. Magnin : La mécanique aléatoire de G. Dedebant et Ph. Wherlé, EPFL, CMT no 124, 1972
6. P. Ravussin : Théorie de la prévisibilité, EPFL, CMT No 134, 1973.
7. P. Ravussin : Mesure des paramètres lagrangiens de la diffusion turbulente, expérience Lagrangex, bases théoriques, EPFL, CMT No 138, 1-12-1980.
8. Mécanique aléatoire de la turbulence et de la diffusion. Cours poste grade des BASES SCIENTIFIQUES DE LA PROTECTION DE L'AIR. Cous officiel en langue française de l'OMM, de l'OMS et du PNUE, EPFL et Université de Paris VII, 1979 et suivants

Abréviations

- EPFZ : Ecole Polytechnique Fédérale de Zürich
- EPFL : Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
- CMT : Chaire de la Mécanique de la Turbulence
- OMM Organisation météorologique mondiale
- OMS Organisation mondiale de la santé
- PNUE Programme des nations unies pour l'environnement